

(Phase estimation Problem)

חז"ל - יצחק בן יוסף

$$e^{2\pi i \theta}$$

$\alpha \leq \theta < \beta$

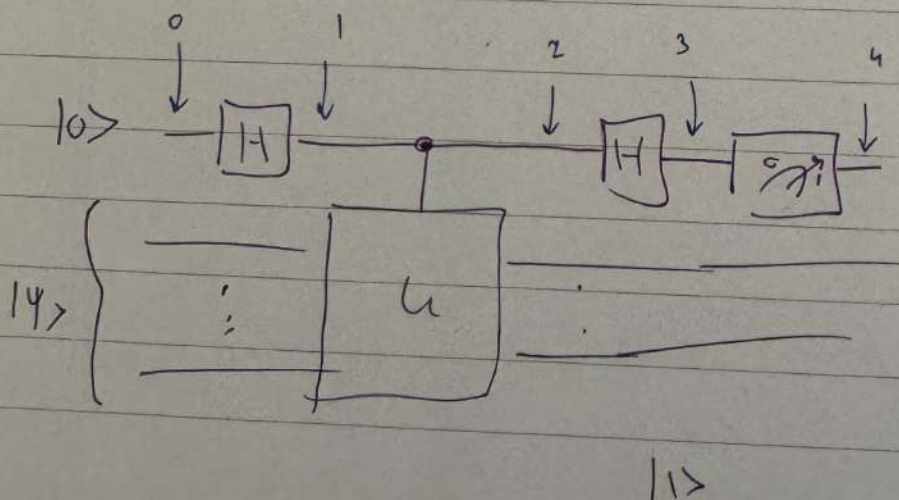
לעב' דקליד, אלן ניר, אדור טער, ארבעט קלייז
שטאנ'ק אדור מ' דא, 1000, ניר אדור אדור 10
מאסאטשוסעטס

$$\frac{y}{2^n}$$

$$\frac{y}{2^n} \quad y \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$$

צד 1 - "מקור"

ת"ל.מ. ירחון קמ"ח



$$|0\rangle = |0\rangle|\psi\rangle$$

$$(1) = H|0\rangle \otimes |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle|\psi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle|\psi\rangle$$

$$(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle|\psi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle U|\psi\rangle$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2\pi i \theta} |1\rangle \right) |\psi\rangle$$

$$(3) = \frac{1}{2} \left(|0\rangle + |1\rangle + e^{2\pi i \theta} (|0\rangle - |1\rangle) \right) |\psi\rangle$$

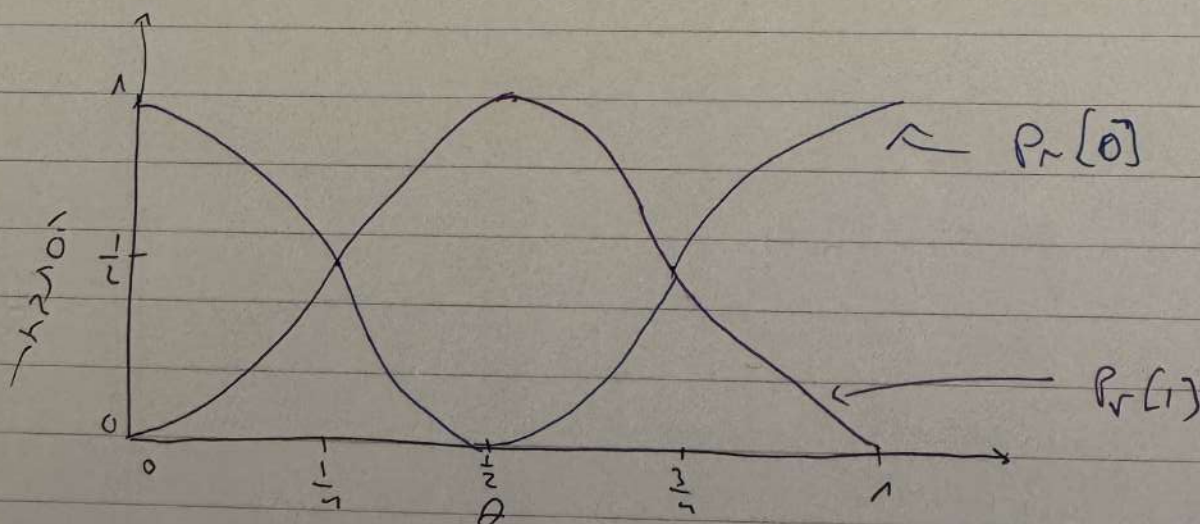
$$= \frac{1}{2} \left((1 + e^{2\pi i \theta}) |0\rangle + (1 - e^{2\pi i \theta}) |1\rangle \right) |\psi\rangle$$

הסתברות — $\rightarrow$ $\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $\frac{1}{2}$

$$P_r[0] = \left| \frac{1 + e^{2\pi i \theta}}{2} \right|^2 = \cos^2(\pi \theta)$$

$$P_r[1] = \sin^2(\pi \theta)$$

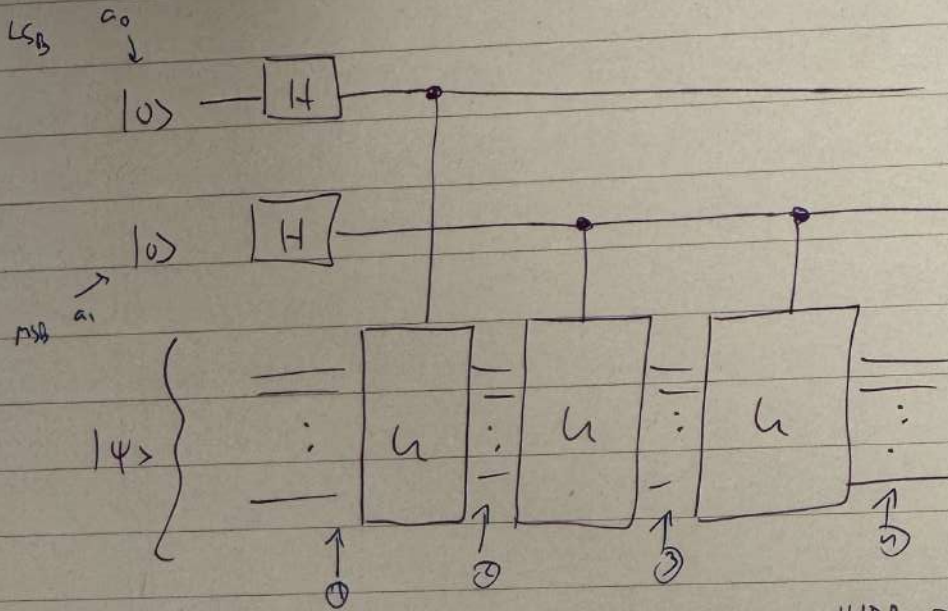
הסתברות $\rightarrow$ $\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $\frac{1}{2}$



הסתברות $\rightarrow$ $\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $\frac{1}{2}$

$|2\rangle$

Q. 1.2.2. A quantum circuit is shown below. The circuit has two input qubits, a_0 and a_1 , and two output qubits, b_0 and b_1 . The circuit consists of a Hadamard gate on a_0 , followed by a CNOT gate with a_0 as control and a_1 as target, followed by a Hadamard gate on a_1 . The output qubits are b_0 and b_1 .



There is a small error in the circuit diagram. The CNOT gates should be controlled by the first qubit and target the second qubit.

$$① = \frac{1}{2} \sum_{a_0=0}^1 \sum_{a_1=0}^1 |a_1 a_0\rangle \quad (\otimes |\psi\rangle)$$

$$② = \frac{1}{2} \sum_{a_0=0}^1 \sum_{a_1=0}^1 e^{2\pi i a_0 \theta} |a_1 a_0\rangle$$

$$③ = \frac{1}{2} \sum_{a_0, a_1} e^{2\pi i (a_0 + a_1) \theta} |a_1 a_0\rangle$$

$$④ = \frac{1}{2} \sum_{a_0, a_1} e^{2\pi i (2a_1 + a_0) \theta} |a_1 a_0\rangle$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{x=0}^3 e^{2\pi i x \theta} |x\rangle$$

$a_1 a_0$	x
00	0
01	1
10	2
11	3

הצורה הכללית של $\theta = \frac{\gamma}{4}$, עבור $\gamma = 0, 1, 2, 3$
 כאשר γ הוא מספר שלם, כלומר $\gamma \in \mathbb{Z}$

$$|\phi_\gamma\rangle = \frac{1}{2} \sum_{x=0}^3 e^{2\pi i \frac{x \cdot \gamma}{4}} |x\rangle$$

כלומר

$$2|\phi_0\rangle = |0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle$$

$$2|\phi_1\rangle = |0\rangle + i|1\rangle - |2\rangle - i|3\rangle$$

$$2|\phi_2\rangle = |0\rangle - |1\rangle + |2\rangle - |3\rangle$$

$$2|\phi_3\rangle = |0\rangle - i|1\rangle - |2\rangle + i|3\rangle$$

הקבוצה $\{|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ היא בסיס אורתוגונלי עבור המרחב $\mathbb{C}^4$.
 נבדוק את האורתוגונליות:

$$\{|\phi_0\rangle \otimes |\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle \otimes |\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle \otimes |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle \otimes |\phi_3\rangle\}$$

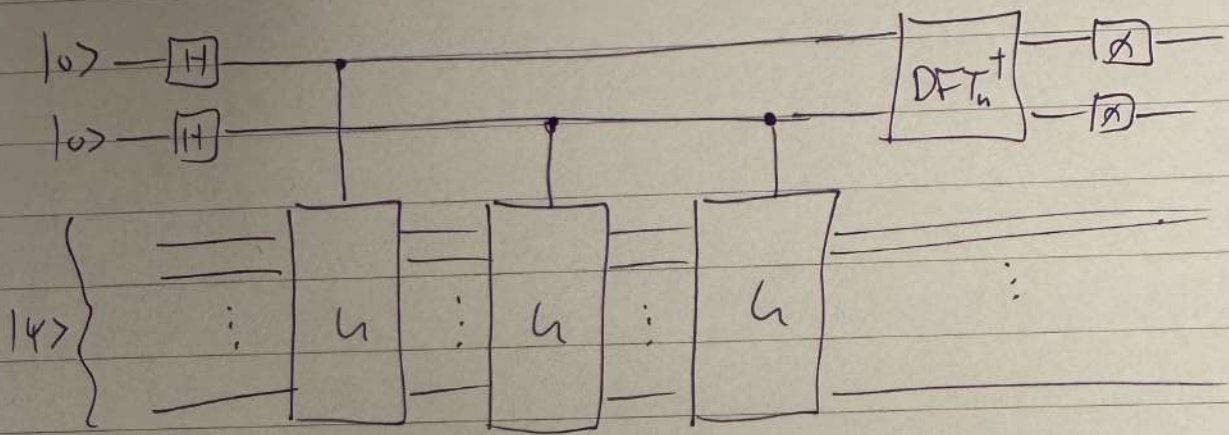
המטרה היא לבדוק את האורתוגונליות של $V|y\rangle = |\phi_y\rangle$ עבור $y=0, \dots, 3$.

אם $V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$

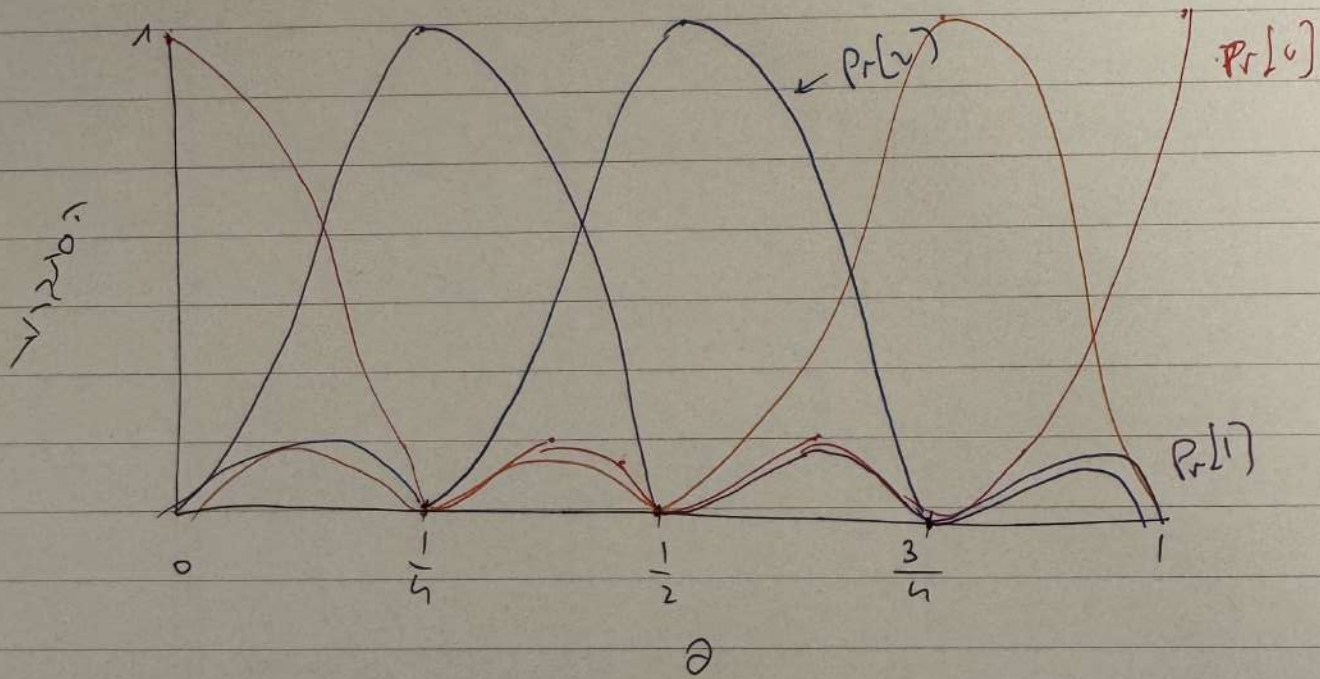
אם V היא מטריצה יחידנית, אז $V^\dagger V = I$.
 נבדוק את האורתוגונליות של $V|y\rangle$ עבור $y=0, \dots, 3$.

$|4\rangle$

for the case



for the case



$$Pr[x] = ?$$

for

for the case $DFT^\dagger \rightarrow$ for

$$\frac{1}{2} \sum_{x=0}^3 e^{2\pi i x \theta} |x\rangle$$

$$|x\rangle \rightarrow |\overline{x}_x\rangle$$

for the case

for

$$\frac{1}{2} \sum_{x=0}^3 e^{2\pi i x \theta} |\bar{x}_x\rangle =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{x=0}^3 e^{2\pi i x \theta} \cdot \frac{1}{2} \sum_{z=0}^3 \omega_4^{-x \cdot z} |z\rangle =$$

$$\frac{1}{4} \sum_{z=0}^3 |z\rangle \left[\sum_{x=0}^3 \left(e^{\frac{\pi i}{2} (4\theta - z)} \right)^x |x\rangle \right]$$

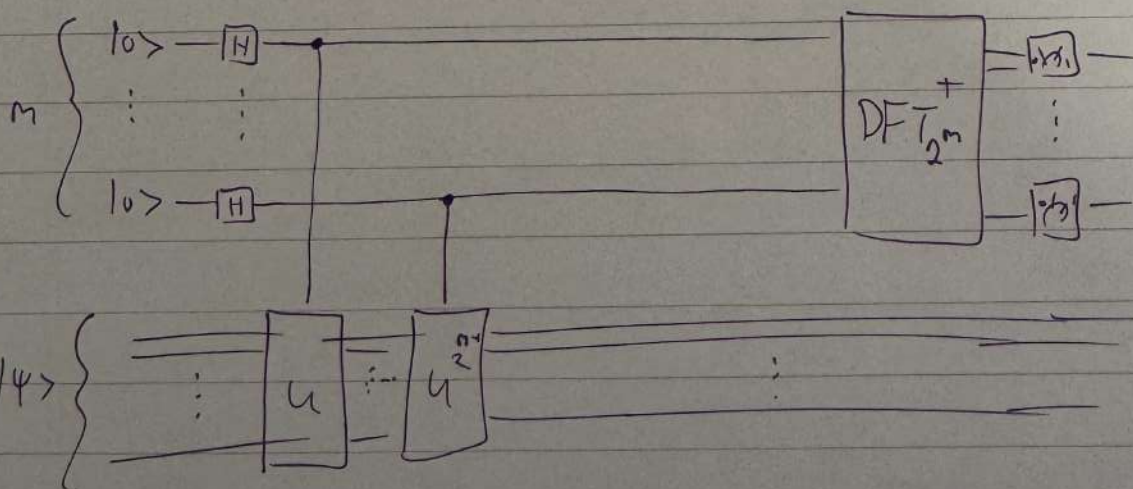
$$\frac{1 - e^{2\pi i (4\theta - z)}}{1 - e^{\frac{\pi i}{2} (4\theta - z)}}$$

$$P_r[z] =$$

$$P_r[z] = \frac{1}{16} \left| \frac{1 - e^{2\pi i (4\theta - z)}}{1 - e^{\frac{\pi i}{2} (4\theta - z)}} \right|^2$$

$$\frac{|1 - e^{2iZ}|^2}{4 \sin^2 Z} \rightarrow \frac{1}{16} \frac{\sin^2(\pi(4\theta - z))}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}(4\theta - z)\right)}$$

QW, SW, v2g, B pkl



$|6\rangle$

הצגה

$$\frac{1}{2^m} \sum_{z=0}^{2^m-1} |z\rangle \left[\sum_{x=0}^{2^m-1} \left(e^{2\pi i (\theta - \frac{z}{2^m}) x} \right)^x \right]$$

←

$$P_r[z] = \frac{1}{2^{2m}} \frac{|1 - e^{2\pi i (2^m \theta - z)}|}{|1 - e^{2\pi i (\theta - 2^{-m} z)}|}$$

$$= \frac{1}{2^{2m}} \frac{\sin^2(\pi (2^m \theta - z))}{\sin^2(\pi (\theta - 2^{-m} z))}$$

⌘

⌘ / m) .0? m "y Q-d p/c ה' ק'ו'ק' k ←

$$\begin{aligned} & |y| \leq 1, |1| \leq \frac{1}{2} \\ & |E| \leq 2^{-(m+1)} \\ & \downarrow \\ & 2^m \theta = y \pm \text{err} \end{aligned}$$

$$| \theta - \frac{y}{2^m} | \leq 2^{-(m+1)}$$

$$y \in \{0, 1, \dots, 2^m-1\} \text{ ויח}$$

ה'ס'ט'י' מ'ק'ו'ק' k — ק'ו'ק' p/c ה' ש' m' y' ו'⌘

$$P_r[y] = \frac{1}{2^{2m}} \frac{\sin^2(\pi \cdot 2^m \epsilon)}{\sin^2(\pi \cdot \epsilon)}$$

ה'ס'ט'י' מ'ק'ו'ק' p/c ה' ש' m' y' ו'⌘ — ק'ו'ק' p/c ה' ש' m' y' ו'⌘
 , 0 ק'ו'ק' , [0, 2^{-m}] — ק'ו'ק' p/c ה' ש' m' y' ו'⌘
 ו'⌘ , ε = 2^{-(m+1)} ו'⌘

$$\frac{1}{2^{2m}} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(2^{-(m+1)}\pi\right)} = \frac{1}{2^{2m}} \left[\frac{1}{2^{-2(m+1)}\pi^2 - \frac{1}{3}(2^{-(m+1)}\pi)^4 + \dots} \right]$$

$\nearrow$
 $\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + O(x^6)$

$$\Rightarrow \frac{4}{\pi^2}$$

מכאן נובע כי $\frac{4}{\pi^2} \geq 0.405$ (כאשר $\pi \approx 3.14$)

$$\frac{4}{\pi^2} \geq 0.405$$

Phase Estimation $\Rightarrow$ Order Finding

נתון $a \in \mathbb{Z}_N^*$ ו- N מס' טבעי.
 נגדיר $M_a |x\rangle = |ax\rangle$ לכל $x \in \mathbb{Z}_N$.

נבנה את המצב $|\psi_j\rangle$ עבור $0 \leq j \leq r-1$ כך ש- $o(a) = r$.

$$|\psi_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{r}} \left(|1\rangle + \omega_r^{-j} |a\rangle + \omega_r^{-2j} |a^2\rangle + \dots + \omega_r^{-j(r-1)} |a^{r-1}\rangle \right)$$

כאן $\omega_r = e^{2\pi i/r}$ הוא השורש ה- r -י של היחיד.

המשפט 6.15 אומר כי $|\psi_j\rangle$ הוא מצב אורתוגונלי לכל j .
 נשתמש ב- $|\psi_j\rangle$ כדי לבצע phase estimation.

$$\frac{y}{2^m} \approx \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{r \pm 1} - \sqrt{\quad} - \frac{1}{r}$$

$$V_{1 \leq r \leq N}$$

phase estimation $\rightarrow$, $\text{cost} \rightarrow O(\frac{1}{\epsilon^2})$ $\rightarrow$ $\text{cost} \rightarrow \frac{1}{\epsilon^2}$

כחלק, אף על פי שהם — ע"פ — 141. נחלקי. במקרה 17'

$$\frac{j}{r} \approx \frac{y}{2^n}$$

28 July 1958

$|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=0}^{r-1} |\psi_j\rangle$

דאָס איז אַ פּאַרטיקלעך פֿאַר אַ פּאַרטיקלעך

7/17 721 phase estimation - 5 1/5 1/5 1/5 1/5

phase estimation $\Rightarrow$

$m = \alpha(\log N)$ $\in \{1, 2, \dots, m\}$ $\rightarrow$ $\{1, 2, \dots, m\}$ $\rightarrow$ $\{1, 2, \dots, m\}$

$$17/2N \rightarrow 25/2N \quad L^{2m} \rightarrow 1/2N \quad \text{et} \quad \rho = 1/3N \rightarrow 1/2N$$

μ_j ו μ_k U^{2^n} μ_j μ_k μ_j, μ_k μ_j, μ_k μ_j, μ_k

poly(N) is - a "type" 2^m a more complex - a more complex
 a more complex a more complex a more complex

$$L = M_a$$

$$L^{2^m} = M_{a^{2^m}}$$

1/11

poly, N is a ring, $\mathbb{Z}_N^x$ is a group a^{2^m} a more complex
 a more complex a more complex

$$\Theta(\text{poly}(m) = \text{poly} \log N$$

1/12