ניסחאות נסיגה

גיל כהן

הנה השאלה הכי פשוטה שעולה בדעתי שהפתרון שלה לגמרי מחוץ לכלים שלמדנו עד כה.

שאלה 1

כמה מחרוזות בינאריות ישנן ללא שני 1-ים רצופים?

הנה השאלה הכי פשוטה שעולה בדעתי שהפתרון שלה לגמרי מחוץ לכלים שלמדנו עד כה.

שאלה 1

כמה מחרוזות בינאריות מאורך n ישנן ללא שני 1-ים רצופים?

דוגמאות

$n=4$	$n=3$	$n=2$	$n=1$
0000	000	00	0
0001	001	01	1
0010	010	10	
0100	~~011~~	~~11~~	
0101	100		
1000	101		
1001	~~110~~		
1010	~~111~~		
8	5	3	2

הנה השאלה הכי פשוטה שעולה בדעתי שהפתרון שלה לגמרי מחוץ לכלים שלמדנו עד כה.

שאלה 1

כמה מחרוזות בינאריות מאורך n ישנן ללא שני 1-ים רצופים?

דוגמאות

$n=1$

0
1

2

$n=2$

0 0
0 1
1 0
~~1 1~~

3

$n=3$

0 0 0
0 0 1
0 1 0
~~0 1 1~~
1 0 0
1 0 1
~~1 1 0~~
~~1 1 1~~

5

$n=4$

0 0 0 0
0 0 0 1
0 0 1 0
0 1 0 0
0 1 0 1
1 0 0 0
1 0 0 1
1 0 1 0

8

$n=5$

0 0 0 0 0
0 0 0 0 1
0 0 0 1 0
0 0 1 0 0
0 0 1 0 1
0 1 0 0 0
0 1 0 0 1
0 1 0 1 0
1 0 0 0 0
1 0 0 0 1
1 0 0 1 0
1 0 1 0 0
1 0 1 0 1

13

שאלה 1

כמה מחרוזות בינאריות מאורך n ישנן ללא שני 1-ים רצופים?

ניסיון ראשון

ננסה להשתמש בכלל הכפל. אם המחרוזת מתחילה ב-0 אז בתא הבא אפשר לשים 0 או 1. אבל אם המחרוזת מתחילה ב-1 אז אנחנו מחויבים לשים 0 בתא הבא.

הבעיה עם השימוש בכלל הכפל היא שבחירה נתונה (1/0) משפיעה על מספר הדרכים להמשיך ולבנות את האיבר.

שאלה 1

כמה מחרוזות בינאריות מאורך n ישנן ללא שני 1-ים רצופים?

ניסיון שני

ננסה את עיקרון ההכלה-הדחה (המשלים).

ניסיון שני

נסמן עבור $1 \le i \le n-1$

$A_i =$ קבוצת המחרוזות הבינאריות באורך n עם 1 בתאים $i, i+1$.

$U =$ קבוצת המחרוזות הבינאריות באורך n

אנו מעוניינים ב- $\left|\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{A_i}\right|$.

אז, למשל

קבוצת המחרוזות הבינאריות באורך n מהצורה

111 ____

$$|A_1 \cap A_2| = 2^{n-3}$$

$$|A_1 \cap A_3| = 2^{n-4}$$

מחרוזות מהצורה

1111 ____

בגלל סוג החיתוכים האפשריים נראה שקשה להשתמש בעיקרון ההכלה - הדחה.

שאלה 1

כמה מחרוזות בינאריות מאורך n ישנן ללא שני 1-ים רצופים?

הרעיון הוא לפתור את הבעיה בשני שלבים.

שלב א': במקום למצוא את מספר המחרוזות הנ"ל באורך n - פתרון שנסמנו ב- a_n, נמצא מהו הקשר (או היחס) בין הפתרונות השונים. כלומר, נמצא נוסחה שמתקיימת בין ה-a_n-ים השונים.

ספוילר אלרט, במקרה שלנו אנו נוכיח כי

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \forall n \geq 3$$

מסתבר שבהרבה מקרים הרבה יותר קל למצוא נוסחה רקורסיבית מסוג זה מאשר למצוא את הפתרון (כלומר את הערך של a_n כפונקציה של n) "במכה אחת".

שלב ב': "נפתור את הנוסחה הרקורסיבית". כלומר, נשכח מהבעיה הקומבינטורית ונמצא את a_n (כפונק' של n) תוך שימוש בטכניקות כלליות למדי "ללא חשיבה" רק מתוך הנוסחה שמצאנו בשלב א'.

הערה: לפעמים הנוסחה הרקורסיבית יותר שימושית ואינפורמטיבית מהפתרון, כלומר, מהביטוי של a_n כפונקציה של n!

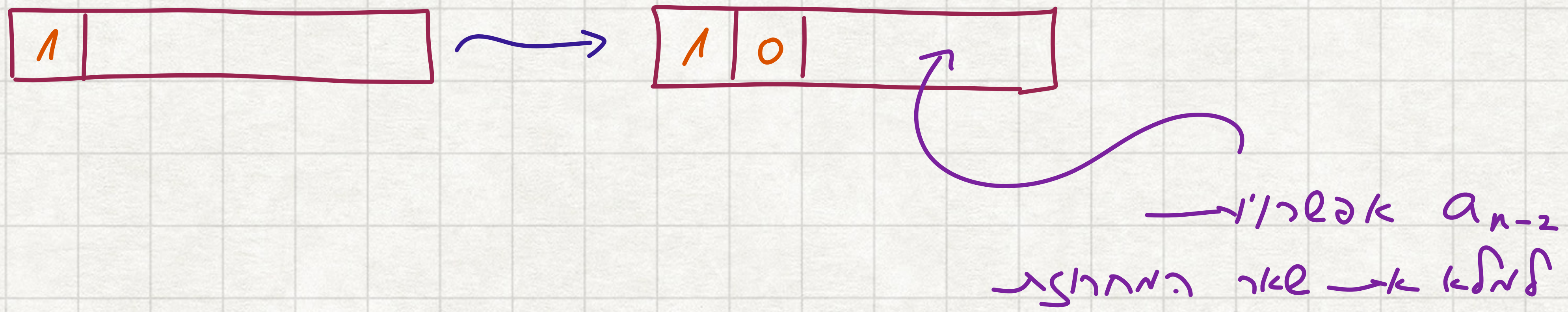
שאלה 1

כמה מחרוזות בינאריות מאורך n ישנן ללא שני 1-ים רצופים?

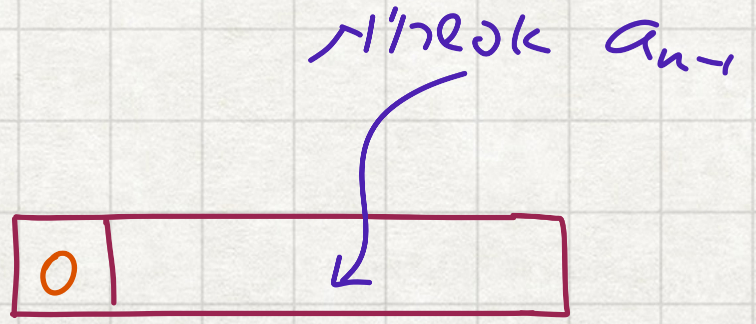
פתרון

נסמן ב-a_n את הפתרון עבור מחרוזות באורך n.

אם המחרוזת מתחילה ב-1 אז אנו מחויבים לשים 0 בתא העוקב. האבחנה החשובה היא שאת שאר $n-2$ הערכים ניתן למלא ע"י כל פתרון לבעיה הנתונה עבור מחרוזות באורך $n-2$, רק ע"י פתרונות אלו.



אם לעומת זאת נתחיל את המחרוזת ב-0 אז כל פתרון של הבעיה עם אורך $n-1$ משרה מחרוזת "חוקית" באורך n, ורק פתרונות אלו יכולים להכנס ב-$n-1$ תאים אלו.

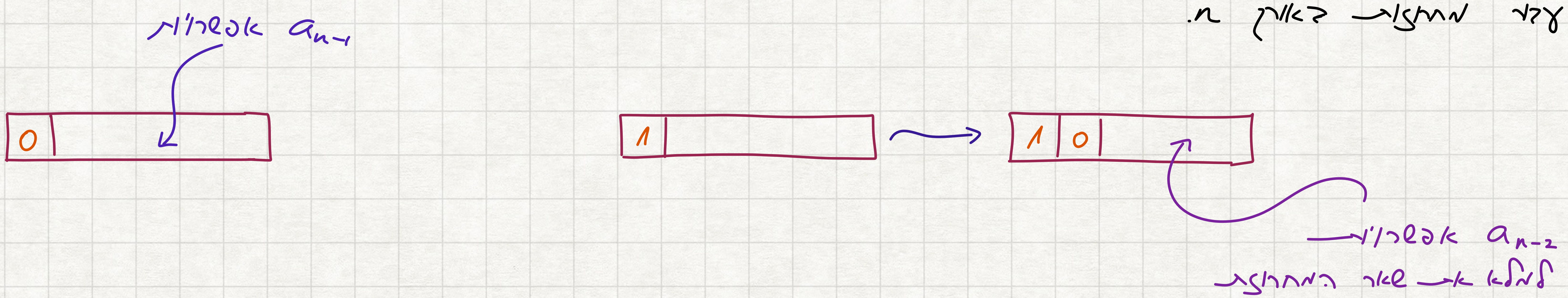


שאלה 1

כמה מחרוזות בינאריות מאורך n ישנן ללא שני 1-ים רצופים?

פתרון

נסמן ב-a_n את הפתרון עבור מחרוזות באורך n.



מכלל החיבור נקבל ש $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (לכל $n \geq 3$).

בכדי לקבוע את הסדרה צריך לציין את תנאי ההתחלה. במקרה שלנו $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{cases}$ יספיקו.

אם רוצים להתחכם טיפה, אפשר לקחת את תנאי ההתחלה $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$ מדוע?

שאלה 1

כמה מחרוזות בינאריות מאורך n ישנן ללא שני 1-ים רצופים?

פתרון

נעבור לשלב ג'.

אנחנו נלמד דרכים סיסטמטיות לפתרון נוסחאות רקורסיביות. אבל, לפני כן, ננסה לתת מוטיבציה לפתרון שנלמד.

ננסה להעריך את a_n. קל לראות כי $a_n > a_{n-1}$ $\forall n$ ולכן

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \leq 2a_{n-1} \implies a_n \leq 2^2 a_{n-2} \leq 2^3 a_{n-3} \leq \cdots \leq 2^n a_0 = 2^n$$

ומצד שני

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \geq 2a_{n-2} \implies a_n \geq 2^2 a_{n-4} \geq 2^3 a_{n-6} \geq \cdots \geq 2^{\frac{n}{2}} a_0 = \sqrt{2}^n$$

על כן הפתרון הוא איפשהו בין $\sqrt{2}^n \sim 1.41^n$ לבין 2^n. האם הפתרון הוא מהצורה c^n עבור איזשהו מספר מגניב c?

שאלה 1

כמה מחרוזות בינאריות מאורך n ישנן ללא שני 1-ים רצופים?

פתרון

האם הפתרון הוא מהצורה c^n עבור איזשהו מספר מגניב c?

נפתח את הרעיון הזה. נניח וכן, אז מה ערכו של c?

ולכן,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \implies c^n = c^{n-1} + c^{n-2}$$

$\Downarrow$ נחלק ב- c^{n-2} - חוקי שכן $c \neq 0$

$$c^2 = c+1 \implies c^2 - c - 1 = 0 \implies c_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

אבל $a_n > 0$ ולכן $c > 0$. כלומר אם הפתרון הוא מהצורה $a_n = c^n$ אזי $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ולכן

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ממ... לא סביר שכן a_n שלם...

שאלה 1

כמה מחרוזות בינאריות מאורך n ישנן ללא שני 1-ים רצופים?

פתרון

הכל, זה היה ניסיון נחמד. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sim 1.618$ הוא מספר מפורסם - חתך הזהב.

קצת Fun facts:

$$\varphi = 2\cos\frac{\pi}{5} \qquad \varphi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$$

ורק כדי להלחיץ אתכם

$$-\frac{\varphi}{2} = \sin(666^\circ) = \cos(6\cdot 6\cdot 6^\circ)$$

שאלה 1

כמה מחרוזות בינאריות מאורך n ישנן ללא שני 1-ים רצופים?

פתרון

אז הכל אבוד? לא! נשים לב שמה שהוכחנו הוא שהן $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ וגם $\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ מהווים פתרון לנוסחה הרקורסיבית. מלבד שני האלמנטים הראשונים משני תנאי ההתחלה.

ממ... אז אולי צירוף של שני אלו הוא הפתרון? עבור נעלמים A,B ננסה לראות אם הפתרון הוא מהצורה

$$a_n = A\alpha^n + B\varphi^n$$

נשים לב שפתרון כזה אכן מקיים את הנוסחה הרקורסיבית:

$$\begin{aligned} A\alpha^n + B\varphi^n &= A(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}) + B(\varphi^{n-1}+\varphi^{n-2}) \\ &= (A\alpha^{n-1}+B\varphi^{n-1}) + (A\alpha^{n-2}+B\varphi^{n-2}) \end{aligned}$$

$\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

שאלה 1

כמה מחרוזות בינאריות מאורך n ישנן ללא שני 1-ים רצופים?

פתרון

אז רק צריך "לתפור" את המשתנים A,B לתנאי ההתחלה

נציב

$$a_0 = 1 = A\alpha^0 + B\varphi^0 \implies 1 = A+B$$

$$a_1 = 2 = A\alpha^1 + B\varphi^1 \implies 2 = \alpha A + \varphi B$$

נפתור

$$2 = \alpha A + \varphi(1-A) = (\alpha-\varphi)A + \varphi = -\sqrt{5}A + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftarrow \quad A = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 2\right) = \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}$$

$$\Leftarrow \quad B = 1-A = \frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}}$$

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}$$

$$B = \frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}}$$

שאלה 1

כמה מחרוזות בינאריות מאורך n ישנן ללא שני 1-ים רצופים?

פתרון

אז הפתרון שלנו הוא

$$a_n = A\alpha^n + B\varphi^n = \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

אני יודע מה אתם חושבים: אין מצב! יש שם כל מיני $\sqrt{5}$-ים...

אבל זה אכן הפתרון - תבדקו. מרצים לא משקרים ☺

איזשהו Sanity check

בכל זאת יהיה נחמד לפחות לראות מדוע הביטוי שלנו הוא מספר ~~שלם~~ רציונלי לכל n.

קצת אריתמטיקה ומקבלים

$$a_n = \frac{1}{2^{n+1}}\Big[\underbrace{(1+\sqrt{5})^n + (1-\sqrt{5})^n}_{*}\Big] + \frac{3}{2^n\cdot\sqrt{5}}\Big[\underbrace{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}_{**}\Big]$$

נשים לב כי, מנוסחת הבינום

$$\begin{cases} (1+\sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{5}^k \\ (1-\sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\sqrt{5})^k \end{cases}$$

ולכן

$$* = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{5}^k\big(\overbrace{1+(-1)^k}^{\substack{2 \quad k \text{ זוגי} \\ 0 \quad k \text{ אי-זוגי}}}\big) = 2\cdot\sum_{k \text{ זוגי}}\binom{n}{k}\sqrt{5}^k \in \mathbb{Z}$$

$$** = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{5}^k\big(\underbrace{1-(-1)^k}_{\substack{2 \quad k \text{ אי-זוגי} \\ 0 \quad k \text{ זוגי}}}\big) = 2\cdot\sum_{k \text{ אי-זוגי}}\binom{n}{k}\sqrt{5}^k \in \sqrt{5}\cdot\mathbb{Z}$$

$\Leftarrow$ $a_n \in \mathbb{Q}$.

מספרי פיבונאצ'י

הסדרה שקיבלנו קשורה לסדרה מפורסמת מאוד, זו של מספרי פיבונאצ'י:

$$\begin{cases} F_n = F_n + F_{n-1} \\ F_1 , F_2 = 1 \end{cases}$$

איברי הסדרה הראשונים הם

$$\begin{array}{cccccccc} & a_0 & a_1 & a_2 & & & a_5 & \\ 1, & 1, & 2, & 3, & 5, & 8, & 13, & \ldots \\ F_1 & F_2 & F_3 & & & & F_7 & \end{array}$$

מספרי פיבונאצ'י

הסדרה שקיבלנו קשורה לסדרה מפורסמת מאוד, זו של מספרי פיבונאצ'י:

$$\begin{cases} F_n = F_n + F_{n-1} \\ F_1 , F_2 = 1 \end{cases}$$

איברי הסדרה הראשונים הם

$$\underset{F_1}{1},\ \underset{F_2}{\overset{a_0}{1}},\ \underset{F_3}{\overset{a_1}{2}},\ \overset{a_2}{3},\ 5,\ 8,\ \underset{F_7}{\overset{a_5}{13}},\ \dots$$

לסדרה ״תכן יותר מיחס רקורסיבי אחד. למשל מספרי פיבונאצ'י מקיימים:

$$F_n^{\,2} = F_{n-1} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

מספרי פיבונאצ'י

הסדרה שקיבלנו קשורה לסדרה מפורסמת מאוד, זו של מספרי פיבונאצ'י:

$$\begin{cases} F_n = F_n + F_{n-1} \\ F_1 , F_2 = 1 \end{cases}$$

איברי הסדרה הראשונים הם

$$\underset{F_1}{1},\ \underset{F_2}{\overset{a_0}{1}},\ \underset{F_3}{\overset{a_1}{2}},\ \overset{a_2}{3},\ 5,\ 8,\ \underset{F_7}{\overset{a_5}{13}},\ \dots$$

לסדרה יתכן יותר מיחס רקורסיבי אחד. למשל מספרי פיבונאצ'י מקיימים:

$$F_n^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

(*) לספר את הבדיחה המאכזבת על מרק פיבונאצ'י.

דוגמה נוספת - עצרת

אז כיבדנו את סדרת העצרות בסימון מיוחד? $a_n = n!$ אבל זה רק סימון.

כמובן שישנו היחס הרקורסיבי:

$$\begin{cases} n! = n\cdot(n-1)! & \quad (a_n = n\cdot a_{n-1}) \\ n_0 = 1 \end{cases}$$

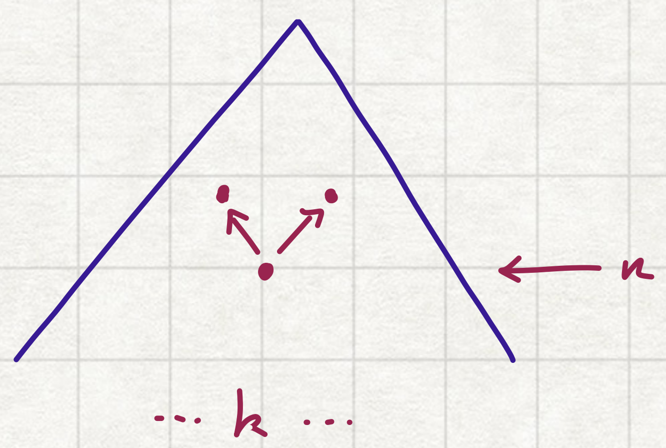
צרות פסקל

לעיתים נתעניין "בסדרה דו-ממדית" של סדרה $(a_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$. למשל,

$$a_{n,k}=\binom{n}{k}$$

במקרה כזה מתקיימת נוסחת הנסיגה

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$



$k \backslash n$	0	1	2	3	4	
0	1	1	1	1	1	...
1	0					
2	0					
3	0					
4	0					

דטרמיננטה

באלגברה לינארית לומדים את נוסחת הנסיגה לחישוב דטרמיננטה

$$\det A = A_{11}\cdot\det A^{(1,1)} - A_{12}\cdot\det A^{(1,2)} + - \cdots + (-1)^n \det A^{(n,n)}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & A^{(1,1)} \end{array}\right) \qquad A = \left(\begin{array}{c|c} A^{(n,n)} & \\ \hline & \end{array}\right)$$

עבור מטריצה נתונה A, הנוסחה כאן היא נוסחת נסיגה ביחס לגודל המטריצה.

תמורות ללא נקודות שבת – מבט שני

בעזרת עיקרון ההכלה הדחה מצאנו נוסחה ל-D_n - מספר התמורות על $[n]$ ללא נק' שבת. נוכיח כעת את הזהות הבאה.

שאלה 2

הוכיחו כי

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$$

מכאן ניתן לקבל נוסחת נסיגה

$$D_n = n! - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$$

תמורות ללא נקודות שבת - מבט שני

בעזרת עיקרון ההכלה והדחה מצאנו נוסחה ל-D_n - מספר התמורות על $[n]$ ללא נק' שבת. נוכיח כעת את הזהות הבאה.

שאלה 2

הוכיחו כי

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$$

מכאן ניתן לחלץ נוסחת נסיגה

$$D_n = n! - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$$

פתרון

נעזר בעיקרון החיבור ונפריד למקרים לפי מספר נק' השבת k.

עבור k קבוע יש $\binom{n}{k}$ אפשרויות לבחירת k נק' השבת. בשאר $n-k$ המקומות אסור שיהיו נק' שבת נוספות. ולכן מעיקרון הכפל, יש $\binom{n}{k} \cdot D_{n-k}$ תמורות עם בדיוק k נק' שבת.

תמורות ללא נקודות שבת מכות שנית

כאמור לסדרות מסוימות יש מספר נוסחאות נסיגה (השונות מהותית אחת מהשניה). זהו גם המקרה עבור D_n.

שאלה ב

הוכיחו כי

$$D_n = (n-1)\left(D_{n-1} + D_{n-2}\right)$$

פתרון

נעזר בעיקרון החיבור, ונפריד למקרים לפי האיבר $2 \leq k \leq n$ שנמצא בתא מספר 1.

מסימטריה, מספר התמורות אינו תלוי בערך של k ולכן נניח בה"כ ש- $k=2$, נמצא תשובה עבור מקרה זה, ונכפיל ב- $n-1$

שאלה ב

הוכיחו כי

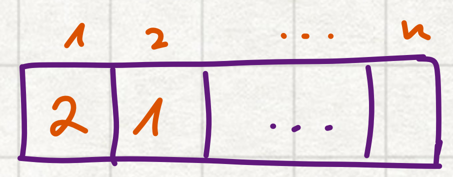
$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

פתרון

נעזר בעיקרון החיבור, ונפריד למקרים לפי האיבר $2 \le k \le n$ שנמצא בתא מספר 1.

מסימטריה, מספר התמורות אינו תלוי בערך של k ולכן נניח בה"כ ש- $k=2$, נמצא תשובה

עבור מקרה זה, ונכפיל ב- $n-1$. נפריד למקרים



מקרה א': 1 נמצא בתא מספר 2.

במקרה זה 1 ו-2 "סגרו את החשבון" ביניהם וכל תמורה ללא נק' שבת מתקבלת

מהשלמת התמורה על $\{3,\dots,n\}$ בתאים $3,\dots,n$. לכן במקרה זה יש D_{n-2} אפשרויות.

שאלה ב

הוכיחו כי

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

פתרון

נעזר בעיקרון החיבור, ונפריד למקרים לפי האיבר $2 \le k \le n$ שנמצא בתא מספר 1.

מסימטריה, מספר התמורות — אינו תלוי בערך של k ולכן נניח בה"כ ש- $k=2$, נמצא תשובה

עבור מקרה זה, ונכפיל ב- $n-1$. נפריד למקרים

מקרה ב': בגלל שאנו לא במקרה א' אנו מחפשים תמורה עם האילוצים הבאים

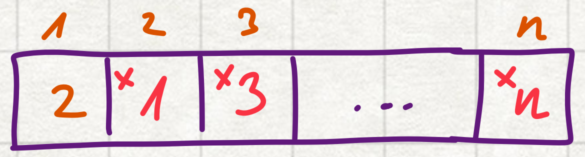
בתא מס 1 יושב 2.

בתא מס 2 אסור ל-1 לשבת

בתא מס 3 אסור ל-3 לשבת

⋮

בתא מס n אסור ל-n לשבת



פתרון

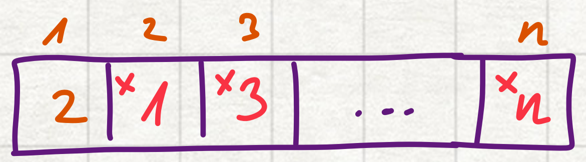
נעזר בעיקרון החיבור, ונפריד למקרים לפי האיבר $2\le k\le n$ שנמצא בתא מספר 1.

מסימטריה, מספר התמורות — אינו תלוי בערך של k ולכן נניח בה"כ ש- $k=2$, נמצא תשובה

עבור מקרה זה, ונכפיל ב- $n-1$. נפריד למקרים

מקרה ב': בגלל שאנו לא במקרה א' אנו מחפשים תמורה עם האילוצים הבאים

בתא מס' 1 יושב 2.



בתא מס' 2 אסור ל-1 לשבת

בתא מס' 3 אסור ל-3 לשבת

⋮

בתא מס' n אסור ל-n לשבת

הנ"ל היא שמות הם רק שמות! בסופו של דבר יש לנו $n-1$ איברים שונים $(1,3,4,\dots,n)$ ו-$n-1$ תאים שונים $(2,3,\dots,n)$

ולכל תא יש איבר אחד ומיוחד שהוא לא מוכן לקבל. מספר התמורות הנ"ל הוא D_{n-1}.

פתרון

נעזר בעיקרון החיבור, ונפריד למקרים לפי האיבר $2\le k\le n$ שנמצא בתא מספר 1.
מסימטריה, מספר התמורות — אינו תלוי בערך של k ולכן נניח בה"כ ש- $k=2$, נמצא תשובה
עבור מקרה זה, ונכפיל ב- $n-1$.

לסיכום

$$D_n = (n-1)\left(D_{n-1}+D_{n-2}\right)$$

עיקרון החיבור + סימטריה
מקרה ב'
מקרה א'

שאלה 4 (מספרי בל (Bell))

נסמן ב- B_n את מספר החלוקות של $[n]$.

הוכיחו כי

$$\begin{cases} B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k} \\ B_0 = B_1 = 1 \end{cases}$$

דוגמה

$n=1$	$n=2$	$n=3$
$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,3\}$
	$\{1\},\{2\}$	$\{1,2\},\{3\}$
		$\{1,3\},\{2\}$
		$\{2,3\},\{1\}$
		$\{1\},\{2\},\{3\}$
$\underline{\underline{1}}$	$\underline{\underline{2}}$	$\underline{\underline{5}}$

$$B_2 = \sum_{k=1}^{2} \binom{2-1}{k-1} B_{2-k} = B_1 + B_2 = 2$$

$$B_3 = \sum_{k=1}^{3} \binom{3-1}{k-1} B_{3-k} = \binom{2}{0}B_2 + \binom{2}{1}B_1 + \binom{2}{2}B_0 = 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 = 5$$

שאלה 4 (מספרי בל (Bell))

נסמן כ- B_n את מספר החלוקות של $[n]$.

הוכיחו כי

$$\begin{cases} B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k} \\ B_0 = B_1 = 1 \end{cases}$$

דוגמה

$n=1$

$\{1\}$

$\underline{\underline{1}}$

$n=2$

$\{1,2\}$

$\{1\},\{2\}$

$\underline{\underline{2}}$

$$B_2 = \sum_{k=1}^{2} \binom{2-1}{k-1} B_{2-k}$$

$$= B_1 + B_2 = 2$$

$n=3$

$\{1,2,3\}$

$\{1,2\},\{3\}$

$\{1,3\},\{2\}$

$\{2,3\},\{1\}$

$\{1\},\{2\},\{3\}$

$\underline{\underline{5}}$

$$B_3 = \sum_{k=1}^{3} \binom{3-1}{k-1} B_{3-k}$$

$$= \binom{2}{0} B_2 + \binom{2}{1} B_1 + \binom{2}{2} B_0$$

$$= 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 = 5$$

$B_4 = 15$

$B_5 = 52$

$B_6 = 203$

$B_7 = 877$

$B_8 = 4140$

$\vdots$

שאלה 4 (מספרי בל (Bell))

נסמן ב- B_n את מספר החלוקות של $[n]$.

הוכיחו כי

$$\begin{cases} B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k} \\ B_0 = B_1 = 1 \end{cases}$$

דוגמה

$n=1$

$\{1\}$

$\underline{\underline{1}}$

$n=2$

$\{1,2\}$

$\{1\}, \{2\}$

$\underline{\underline{2}}$

$$B_2 = \sum_{k=1}^{2} \binom{2-1}{k-1} B_{2-k}$$

$$= B_1 + B_2 = 2$$

$n=3$

$\{1,2,3\}$

$\{1,2\}, \{3\}$

$\{1,3\}, \{2\}$

$\{2,3\}, \{1\}$

$\{1\}, \{2\}, \{3\}$

$\underline{\underline{5}}$

$$B_3 = \sum_{k=1}^{3} \binom{3-1}{k-1} B_{3-k}$$

$$= \binom{2}{0} B_2 + \binom{2}{1} B_1 + \binom{2}{2} B_0$$

$$= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 5$$

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

$B_4 = 15$

$B_5 = 52$

$B_6 = 203$

$B_7 = 877$

$B_8 = 4140$

$\vdots$

שאלה 4 (מספרי בל (Bell))

נסמן ב- B_n את מספר החלוקות של $[n]$.

הוכיחו כי

$$\begin{cases} B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k} \\ B_0 = B_1 = 1 \end{cases}$$

פתרון

נעזר בעיקרון החיבור ונפרק למקרים לפי מספר האיברים k שנמצאים יחד עם האיבר 1. נשים לב כי $n \geq k \geq 1$.

עבור k קבוע, צריך לבחור $k-1$ מתוך $n-1$ האיברים שיצטרפו ל-1. לכך יש $\binom{n-1}{k-1}$ אפשרויות.

שאלה 4 (מספר בל (Bell))

נסמן ב- B_n את מספר החלוקות של $[n]$.

הוכיחו כי

$$\begin{cases} B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k} \\ B_0 = B_1 = 1 \end{cases}$$

פתרון

נעזר בעיקרון החיבור ונפריד למקרים לפי מספר האיברים k שנמצאים יחד עם האיבר 1. נשים לב כי $1 \le k \le n$.

עבור k קבוע, צריך לבחור $k-1$ מתוך $n-1$ האיברים שיצטרפו ל-1. לצורך כך יש $\binom{n-1}{k-1}$ אפשרויות.

עבור כל בחירה כזו יש לחלק את $n-k$ האיברים הנותרים. לכך יש B_{n-k} אפשרויות.

מכלל הכפל, עבור k קבוע יש $\binom{n-1}{k-1}B_{n-k}$ חלוקות של $[n]$ כך שהחלק שמכיל את 1 הוא בגודל k.

על כן, מעיקרון החיבור

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}.$$

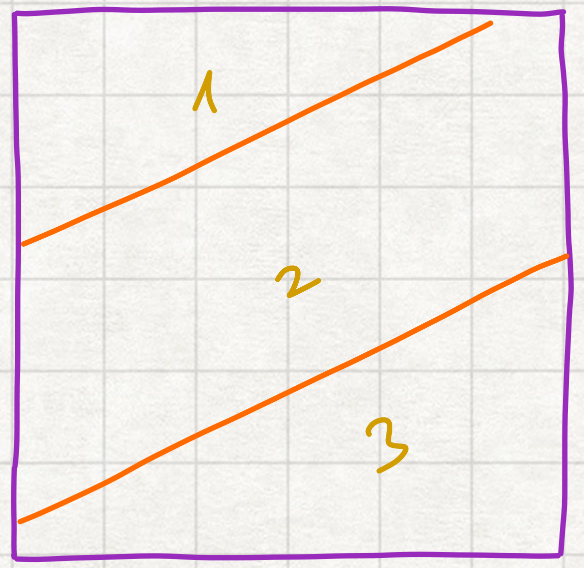
שאלה 5

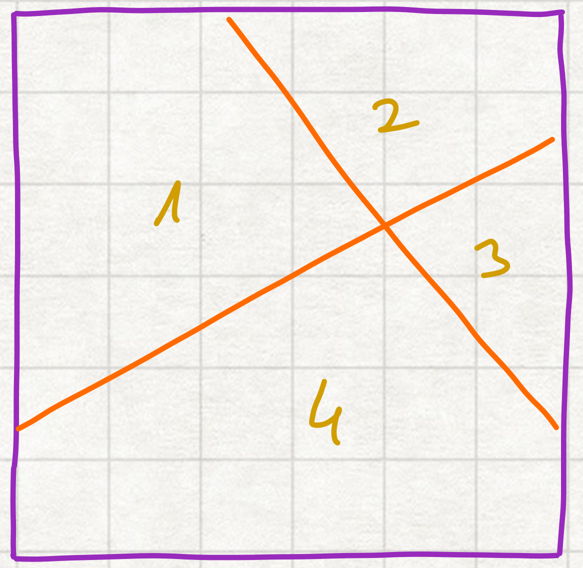
לכמה אזורים מחלקים את המישור n ישרים ?

שאלה 5

לכמה אזורים מחלקים את המישור n ישרים ?

אוק, יש בעיה עם השאלה... תלוי בישרים

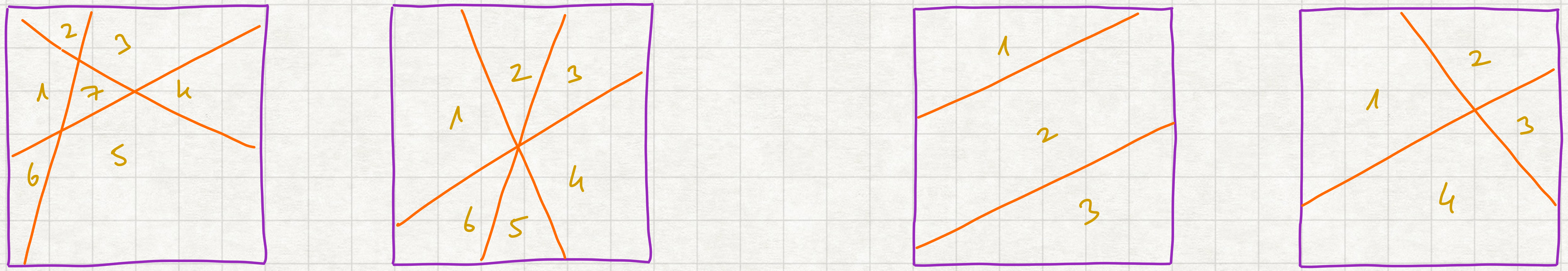




שאלה 5

לכמה אזורים מחלקים את המישור n ישרים ?

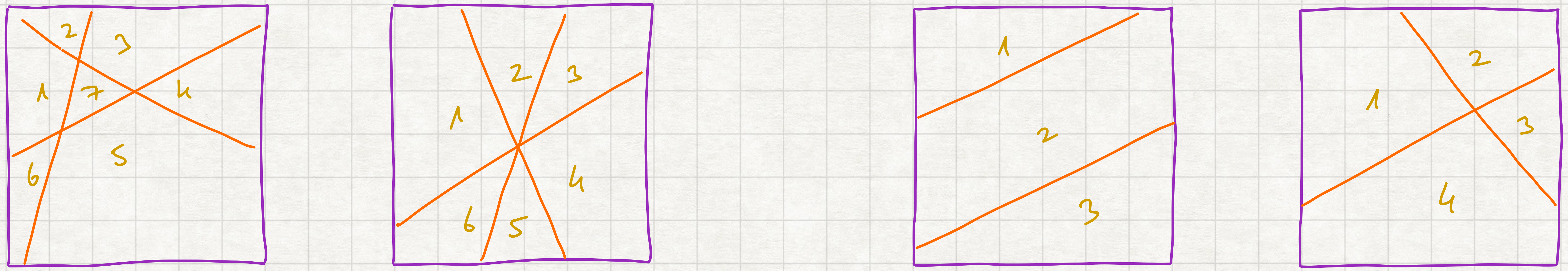
אז, יש בעיה עם השאלה... תלוי בישרים



שאלה 5

לכמה אזורים מחלקים את המישור n ישרים ?

אבל, יש בעיה עם השאלה... תלוי בישרים



ישרים הם במצב כללי (general position) אם

1) אין שני ישרים מקבילים.

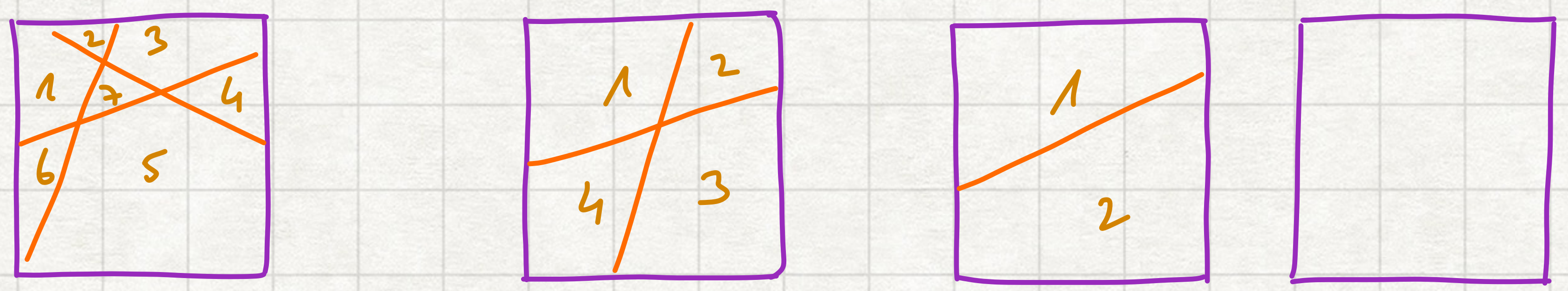
2) אין שלושה ישרים העוברים דרך נק' אחת.

שאלה 5

לכמה אזורים מחלקים את המישור n ישרים הנמצאים במצב כללי?

דוגמא ←

$n=0$ $n=1$ $n=2$ $n=3$



1 2 4 7

שאלה 5

לכמה אזורים מחלקים את המישור n ישרים הנמצאים במצב כללי?

פתרון

כל ישר נוסף שמתווסף חותך את כל אחד מהישרים (שכן אין ישרים מקבילים)
וכל נק' חיתוך כזו היא שונה (כי אין נק' בה שלושה ישרים נחתכים). לכן הקו
ה-n-י "מייצר" n חלקים נוספים.
על כן אם נסמן ב- d_n את התשובה עבור n ישרים אז

$$\begin{cases} d_n = d_{n-1} + n \\ d_0 = 1 \end{cases}$$

שאלה 5

לכמה אזורים מחלקים את המישור n ישרים הנמצאים במצב כללי?

פתרון

נסמן ב- d_n את התשובה עבור n ישרים אז

$$\begin{cases} d_n = d_{n-1} + n \\ d_0 = 1 \end{cases}$$

מכאן קל לקבל את התשובה:

$$\begin{aligned} d_n &= d_{n-1} + n \\ &= d_{n-2} + (n-1) + n \\ &= d_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\ &\vdots \\ &= d_0 + 1 + 2 + \cdots + n \\ &= \underline{1 + \frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

שאלה 5

לכמה אזורים מחלקים את המישור n ישרים הנמצאים במצב כללי?

פתרון

נסמן ב- d_n את התשובה עבור n ישרים אז

$$\begin{cases} d_n = d_{n-1} + n \\ d_0 = 1 \end{cases}$$

מכאן קל לקבל את התשובה:

$$\begin{aligned} d_n &= d_{n-1} + n \\ &= d_{n-2} + (n-1) + n \\ &= d_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\ &\vdots \\ &= d_0 + 1 + 2 + \cdots + n \\ &= 1 + \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

זו לא הוכחה פורמלית שכן 3 הנק' הנ"ל
מסתירות את זה שאנחנו "ניחשנו" תבנית
ועצרנו בה בכדי לקבל את התשובה הסופית
אך לא הוכחנו שהתבנית הזו אכן נכונה!

טכנית זו לא נחשבת הוכחה פורמלית, ובכל זאת כאשר "רואים" את התשובה קל להוכיח זאת באופן פורמלי באינדוקציה.

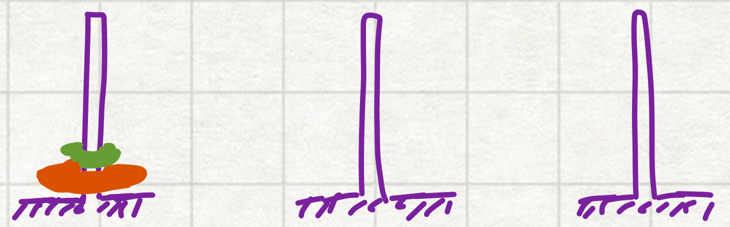
שאלה 6 (מגדלי האנוי)

נתונים שלושה עמודים ו- n דיסקיות בגדלים שונים. בתחילה כל הדיסקיות מושחלות לעמוד השמאלי, מהגדולה למטה ועד הקטנה למעלה. נרצה להעביר את הדיסקיות, כמות שהן לעמוד הימני.

בכל צעד מותר להזיז דיסקית אחת - העליונה בעמוד שלה, לעמוד אחר, מעל שאר הדיסקיות באותו עמוד. כמה צעדים נדרש ?

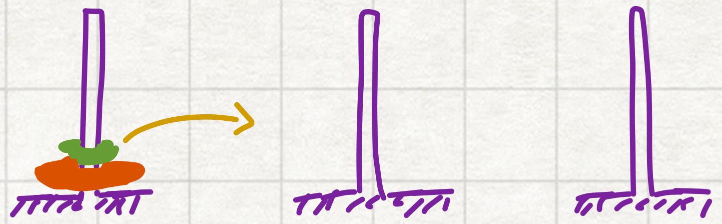
שאלה 6 (מגדלי האנוי)

נתונים שלושה עמודים ו-n דיסקיות בגדלים שונים. בתחילה כל הדיסקיות מושחלות לעמוד השמאלי, מהגדולה למטה ועד הקטנה למעלה. נרצה להעביר את הדיסקיות, כמו שהן לעמוד הימני. בכל צעד מותר להזיז דיסקית אחת - העליונה בעמוד שלה, לעמוד אחר, מעל שאר הדיסקיות באותו עמוד. כמה צעדים נדרש?



שאלה 6 (מגדלי האנוי)

נתונים שלושה עמודים ו- n דיסקיות בגדלים שונים. בתחילה כל הדיסקיות מושחלות לעמוד השמאלי,
מהגדולה למטה ועד הקטנה למעלה. נרצה להעביר את הדיסקיות, כמות שהן לעמוד הימני.
בכל צעד מותר להזיז דיסקית אחת - העליונה בעמוד שלה, לעמוד אחר, מעל שאר הדיסקיות
באותו עמוד. כמה צעדים נדרש?



שאלה 6 (מגדלי האנוי)

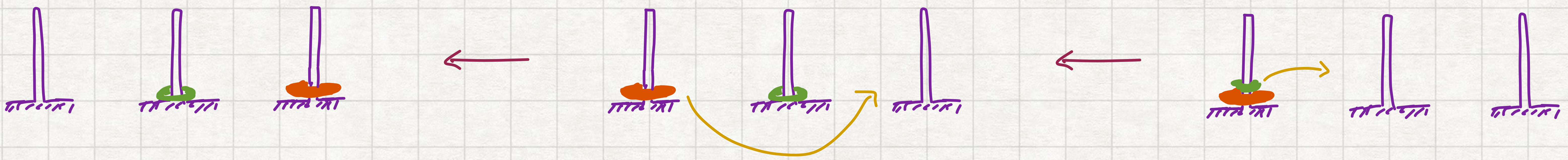
נתונים שלושה עמודים ו- n דיסקיות בגדלים שונים. בתחילה כל הדיסקיות מושחלות לעמוד השמאלי, מהגדולה למטה ועד הקטנה למעלה. נרצה להעביר את הדיסקיות, כמות שהן לעמוד הימני.
בכל צעד מותר להזיז דיסקית אחת - העליונה בעמוד שלה, לעמוד אחר, מעל שאר הדיסקיות באותו עמוד. כמה צעדים נדרש?

שאלה 6 (מגדלי האנוי)

נתונים שלושה עמודים ו-n דיסקיות עגולים שונים. בתחילה כל הדיסקיות מושחלות לעמוד השמאלי, מהגדולה למטה ועד הקטן למעלה. נרצה להעביר את הדיסקיות, כמו שהן לעמוד הימני.
בכל צעד מותר להזיז דיסקית אחת - העליונה בעמוד שלה, לעמוד אחר, מעל שאר הדיסקיות באותו עמוד. כמה צעדים נדרש?

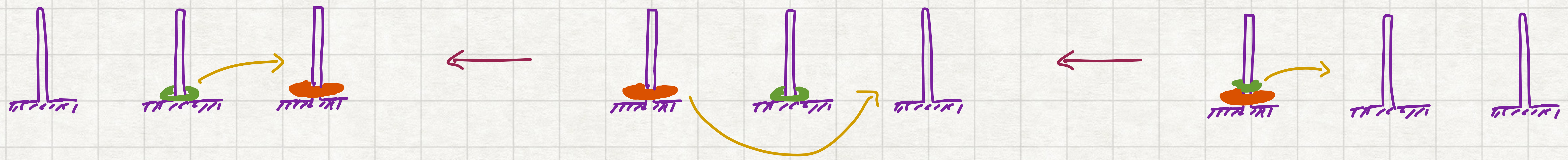
שאלה 6 (מגדלי האנוי)

נתונים שלושה עמודים ו- n דיסקיות בגדלים שונים. בתחילה כל הדיסקיות מושחלות לעמוד השמאלי, מהגדולה למטה ועד הקטנה למעלה. נרצה להעביר את הדיסקיות, כמות שהן לעמוד הימני. בכל צעד מותר להזיז דיסקית אחת - העליונה בעמוד שלה, לעמוד אחר, מעל שאר הדיסקיות באותו עמוד. כמה צעדים נצטרך?



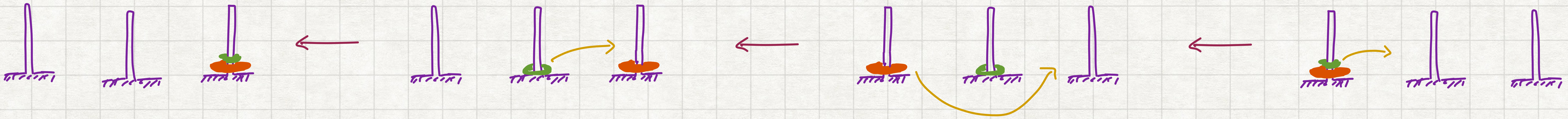
שאלה 6 (מגדלי האנוי)

נתונים שלושה עמודים ו- n דיסקיות בגדלים שונים. בתחילה כל הדיסקיות מושחלות לעמוד השמאלי, מהגדולה למטה ועד הקטנה למעלה. נרצה להעביר את הדיסקיות, כמות שהן לעמוד הימני. בכל צעד מותר להזיז דיסקית אחת - העליונה בעמוד שלה, לעמוד אחר, מעל שאר הדיסקיות באותו עמוד. כמה צעדים נצטרך ?



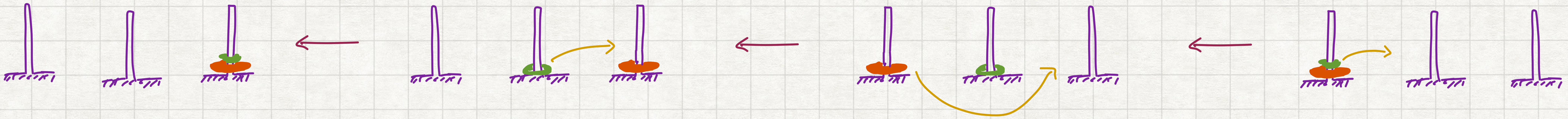
שאלה 6 (מגדלי האנוי)

נתונים שלושה עמודים ו- n דיסקיות בגדלים שונים. בתחילה כל הדיסקיות מושחלות לעמוד השמאלי, מהגדולה למטה ועד הקטנה למעלה. נרצה להעביר את הדיסקיות, כמות שהן לעמוד הימני. בכל צעד מותר להזיז דיסקית אחת - העליונה בעמוד שלה, לעמוד אחר, מעל שאר הדיסקיות באותו עמוד. כמה צעדים נדרש?



שאלה 6 (מגדלי האנוי)

נתונים שלושה עמודים ו- n דיסקיות עגולים שונים. בתחילה כל הדיסקיות מושחלות לעמוד השמאלי, מהגדולה למטה ועד הקטן למעלה. נרצה להעביר את הדיסקיות, כמות שהן לעמוד הימני. בכל צעד מותר להזיז דיסקית אחת - העליונה בעמוד שלה, לעמוד אחר, מעל שאר הדיסקיות באותו עמוד. כמה צעדים נצטרך?



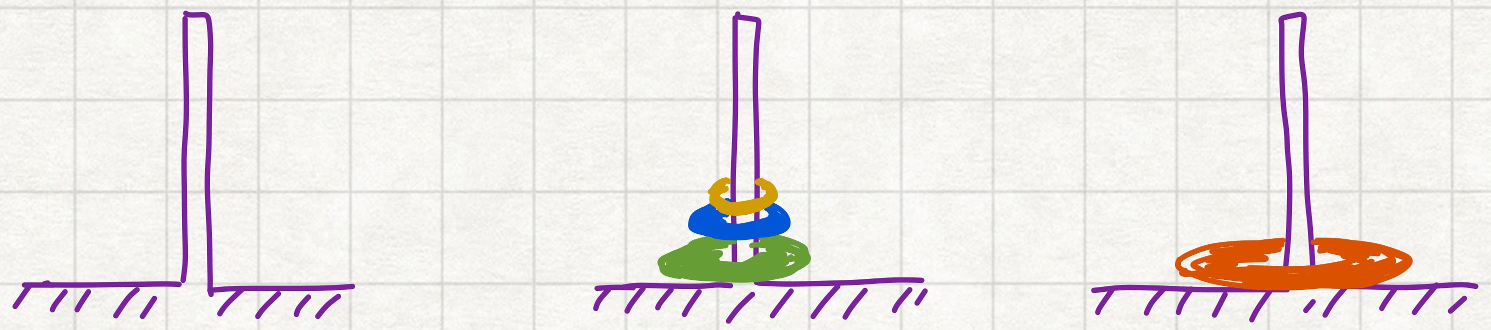
אם נסמן ב- h_n את מספר הצעדים המינימלי הנדרש עבור n דיסקיות, אז $h_2 = 3$.

כמובן, $h_1=1$ ו- $h_0=0$.

פתרון

נבחין כי הדיסקית הגדולה ביותר צריכה בשלב כלשהו להיות בתחתית העמוד הימני.

ולכן באיזשהו שלב המצב יראה כך:



כלומר n-1 הדיסקיות הקטנות
תוך התעלמות מהגדולה

לכן הרקורסיה האופטימלית היא

באופן אופטימלי!

1) פתור את הבעיה עבור $n-1$ דיסקיות (אך מהעמוד השמאלי לאמצעי)

2) העבר את הדיסקית הגדולה ביותר מהעמוד השמאלי לימני

3) פתור את הבעיה עבור $n-1$ הדיסקיות הקטנות (מהעמוד האמצעי לימני).

באופן אופטימלי!

$\Leftarrow$ $h_n = 2h_{n-1} + 1$.

נוודא $h_0 = 0$ $\Leftarrow$ $h_1 = 1$ ✓ $\Leftarrow$ $h_2 = 3$ ✓

פתרון

$$\begin{cases} h_n = 2h_{n-1} + 1 \\ h_0 = 0 \end{cases}$$

ננסה לראות מה יוצא ע"י "הצבה חוזרת":

$$\begin{aligned} h_n &= 2h_{n-1} + 1 \\ &= 2(2h_{n-2}+1)+1 \\ &= 2^2 h_{n-2} + 1+2 \\ &= 2^2(2h_{n-3}+1)+1+2 \\ &= 2^3 h_{n-3} + 1+2+2^2 \end{aligned}$$

עדיף להשאיר כך מאשר לכתוב $4h_{n-2}+3$

ומזה <u>הניחוש</u> שלנו הוא ש

$$h_n = 2^n \underbrace{h_0}_{=0} + \underbrace{1+2+2^2+\dots+2^{n-1}}_{2^n-1} = 2^n - 1$$

ניחוש זה מתאים לערכים שבדקנו. את נכונותו צריך להוכיח באינדוקציה.

הגדרה

יהיו $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}$. נוסחת נסיגה מהצורה

$$f(n) = c_1 f(n-1) + \dots + c_r f(n-r)$$

נקראת ← נוסחת נסיגה מסדר r עם מקדמים קבועים.

דוגמאות ←

א) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

ב) $a_n = a_{n-1} - 2a_{n-4}$

אנטי דוגמאות ←

א) $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

ב) $h_n = 2h_{n-1} + 1$

ג) $d_n = d_{n-1} + n$

ד) $a_n = n \cdot a_{n-1}$

ה) $a_n = a_{n-1}^2$

הגדרה

יהיו $c_1,\dots,c_r\in\mathbb{R}$. נוסחת נסיגה מוגדרת

$$f(n)=c_1f(n-1)+\dots+c_rf(n-r)$$

נקראת <u>נוסחת נסיגה הומוגנית מסדר r עם מקדמים קבועים</u>.

המשך הגדרה

<u>הפולינום האופייני</u> של נוסחת הנסיגה מוגדר ע"י $P(x)=x^r-c_1x^{r-1}-c_2x^{r-2}-\dots-c_r$

משפט

אם שורשי הפול' האופייני $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ הם <u>ממשיים</u> <u>ושונים</u>. אז לכל $a_1,\dots,a_r\in\mathbb{R}$ הביטוי $a_1\alpha_1^n+\dots+a_r\alpha_r^n$ מקיים את נוסחת הנסיגה.

בנוסף r תנאי התחלה $f(0),\dots,f(r-1)$ קובעים את $a_1,\dots,a_r$.

שאלה 7

פיתרו את נוסחת הנסיגה:

$$\begin{cases} F_n = 3F_{n-1} - 2F_{n-2} \\ F_0 = F_1 = 1 \end{cases}$$

שאלה 7

פתרו את נוסחת הנסיגה

$$\begin{cases} F_n = 3F_{n-1} - 2F_{n-2} \\ F_0 = F_1 = 1 \end{cases}$$

פתרון

זוהי נוסחת נסיגה הומוגנית מסדר 2 עם מקדמים קבועים. הפולינום האופייני המתאים הוא

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

ולכן, מהמשפט, הפתרון הוא מהצורה $F_n = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n$.

שאלה 7

פתרו את נוסחת הנסיגה

$$\begin{cases} F_n = 3F_{n-1} - 2F_{n-2} \\ F_0 = F_1 = 1 \end{cases}$$

פתרון

זוהי נוסחת נסיגה הומוגנית מסדר 2 עם מקדמים קבועים. הפולינום האופייני המתאים הוא

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

לכן, מהמשפט, הפתרון הוא מהצורה $F_n = A\cdot 1^n + B\cdot 2^n$.

נמצא את A,B בעזרת תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} 1 = A\cdot 1^0 + B\cdot 2^0 = A+B \\ 1 = A\cdot 1^1 + B\cdot 2^1 = A+2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \end{cases}$$

שאלה 7

פיתרו את נוסחת הנסיגה

$$\begin{cases} F_n = 3F_{n-1} - 2F_{n-2} \\ F_0 = F_1 = 1 \end{cases}$$

פתרון

זוהי נוסחת נסיגה הומוגנית מסדר 2 עם מקדמים קבועים. הפולינום האופייני המתאים הוא

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

לכן, מהמשפט, הפתרון הוא מהצורה $F_n = A\cdot 1^n + B\cdot 2^n$.

נמצא את A,B בעזרת תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} 1 = A\cdot 1^0 + B\cdot 2^0 = A+B \\ 1 = A\cdot 1^1 + B\cdot 2^1 = A+2B \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \end{cases}$$

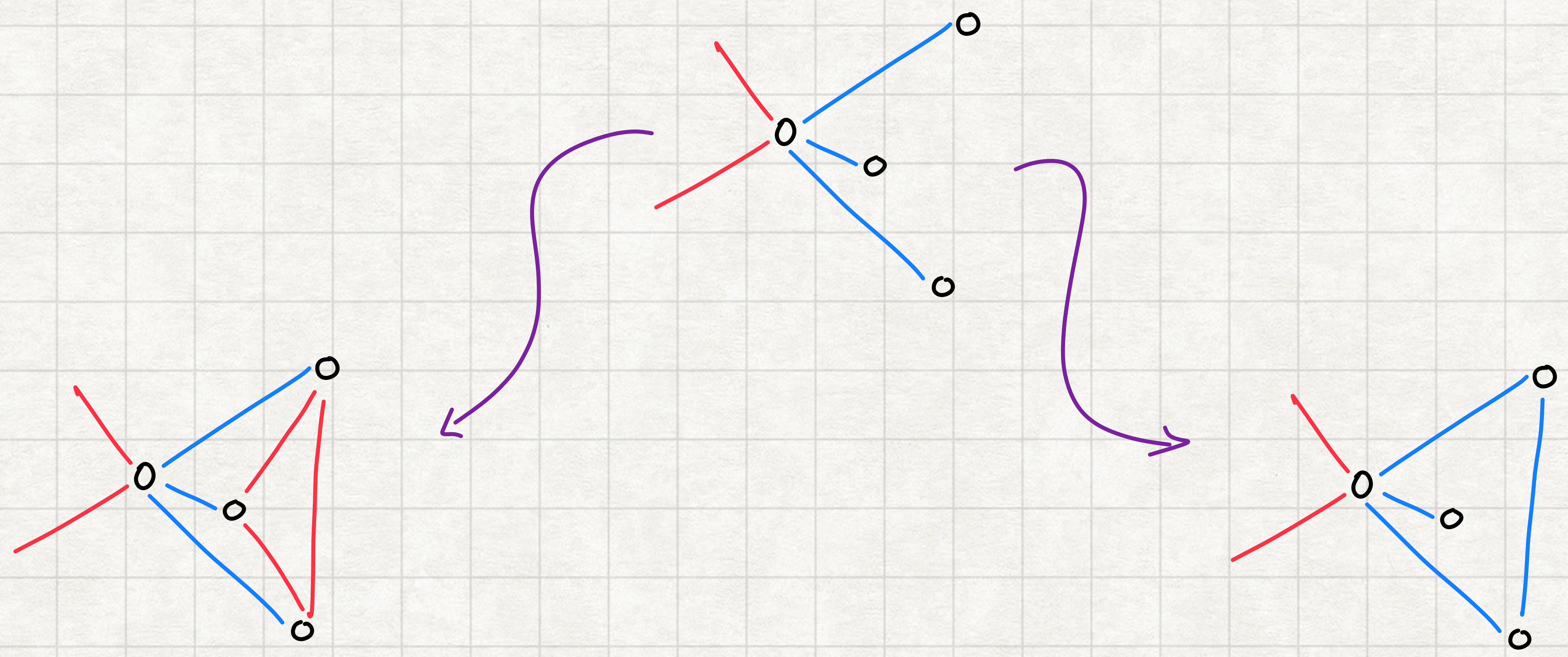
$F_n = 1$:)

מספרי ראמזי

בהינתן מספרים $s,t\geq 2$ נסמן ב- $R=R(s,t)$ את המספר הקטן ביותר כך שכל צביעה בקשתות של K_R בשני צבעים - כחול ואדום "מכילה" K_s כחול או K_t אדום.

תזכורת

ראינו כי $R(3,3)=6$:

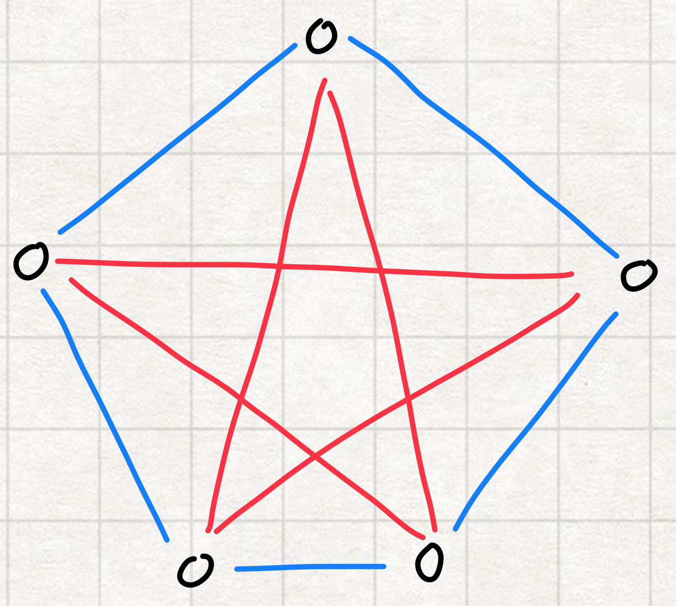


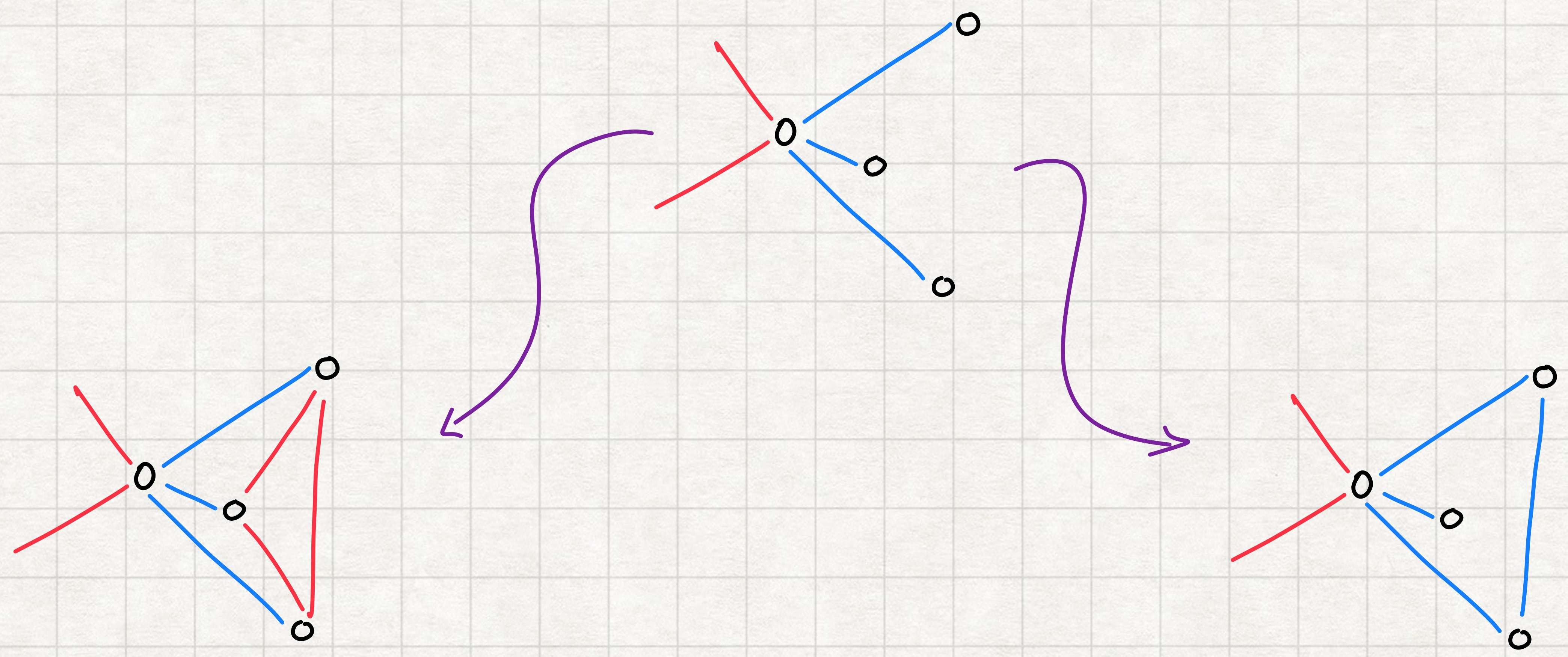
מספרי רמזי

בהינתן מספרים $s,t\geq 2$ נסמן ב- $R=R(s,t)$ את המספר הקטן ביותר כך שכל צביעה בקשתות של K_R בשני צבעים - כחול ואדום "מכילה" K_s כחול או K_t אדום.

תזכורת

ראינו כי $R(3,3)=6$:





מספרי ראמזי

בהינתן מספרים $s,t\geq 2$ נסמן ב- $R=R(s,t)$ את המספר הקטן ביותר כך שכל צביעה בקשתות של K_R בשני צבעים - כחול ואדום "מכילה" K_s כחול או K_t אדום.

שאלה 8

חשבו את $R(2,t)$.

מספרי רמזי

בהינתן מספרים $s,t \geq 2$ נסמן ב- $R=R(s,t)$ את המספר הקטן ביותר כך שבכל צביעה בקשתות של K_R בשני צבעים - כחול ואדום "מכילה" K_s כחול או K_t אדום.

שאלה 8

חשבו את $R(2,t)$.

פתרון

ראשית $R(2,t) \leq t$ שכן כל צביעה של קשתות K_t מכילה או קשת אחת כחולה או שכל הקשתות אדומות.

מספרי ראמזי

בהינתן מספרים $s,t\geq 2$ נסמן ב- $R=R(s,t)$ את המספר הקטן ביותר כך שבכל צביעה בקשתות של K_R בשני צבעים - כחול ואדום "מכילה" K_s כחול או K_t אדום.

שאלה 8

חשבו את $R(2,t)$.

פתרון

ראשית $R(2,t)\leq t$ שכן כל צביעה של קשתות K_t מכילה או קשת אחת כחולה או שכל הקשתות אדומות.

מצד שני $R(2,t)>t-1$ שכן הצביעה של קשתות K_{t-1} לא מכילה K_t אדום ולא קשת (K_2) כחולה.

$\Leftarrow$ $R(2,t)=t$.

מספרי ראמזי

בהינתן מספרים $s,t\geq 2$ נסמן ב- $R=R(s,t)$ את המספר הקטן ביותר כך שכל צביעה בקשתות של K_R בשני צבעים - כחול ואדום "מכילה" K_s כחול או K_t אדום.

משפט ארדש-סקרס

אף אחד לא יודע לומר מהו $R(s,t)$ בדיוק אפילו עבור $s=t=5$

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$$

מספרי ראמזי

בהינתן מספרים $s,t\geq 2$ נסמן ב- $R=R(s,t)$ את המספר הקטן ביותר כך שבכל צביעה בקשתות של K_R בשני צבעים - כחול ואדום "מובטח" K_s כחול או K_t אדום.

משפט ארדש-סקרס

אף אחד לא יודע למה שווה $R(s,t)$ בדיוק אפילו עבור $s=t=5$

$$R(s,t)\leq\binom{s+t-2}{s-1}$$

דוגמאות

א) $R(2,t)\leq\binom{2+t-2}{2-1}=t$

ב) $R(3,3)\leq\binom{3+3-2}{3-1}=6$

ג) $18=R(4,4)\leq\binom{4+4-2}{4-1}=\binom{6}{3}=20$

ד) $R(5,5)\leq\binom{5+5-2}{5-1}=70$

אך ידוע ש $43\leq R(5,5)\leq 49$

מספרי ראמזי

בהינתן מספרים $s,t\geq 2$ נסמן ב- $R=R(s,t)$ את המספר הקטן ביותר כך שכל צביעה בקשתות של K_R בשני צבעים - כחול ואדום "מכילה" K_s כחול או K_t אדום.

רגע... כמה קשה לחשב את $R(5,5)$?

אנו יודעים ש- $43 \leq R(5,5) \leq 49$. כדי לבדוק אם $R(5,5)=43$ צריך לעבור על כל הצביעות של K_{43} ולחפש בהן K_5 מונוכרומטי. כמה צביעות כאלו יש?

מספרי רמזי

בהינתן מספרים $s,t \ge 2$ נסמן ב- $R=R(s,t)$ את המספר הקטן ביותר כך שכל צביעה בקשתות של K_R בשני צבעים - כחול ואדום "מכילה" כחול K_s או K_t אדום.

רגע... כמה קשה לחשב את $R(s,s)$?

אנו יודעים ש- $43 \le R(5,5) \le 49$. כדי לבדוק אם $R(5,5)=43$ צריך לעבור על כל הצביעות של K_{43} ולחפש בהן K_5 מונוכרומטי. כמה צביעות כאלו יש?

$$2^{\binom{43}{2}} = 2^{903}$$

גיל היקום בשניות הוא פחות מ- 2^{60}...

מספרי ראמזי

בהינתן מספרים $s,t \ge 2$ נסמן ב- $R=R(s,t)$ את המספר הקטן ביותר כך שכל צביעה בקשתות של K_R בשני צבעים - כחול ואדום "מכילה" K_s כחול או K_t אדום.

משפט ארדש-סקרש

$$R(s,t) \le \binom{s+t-2}{s-1}$$

לצורך הוכחת המשפט נוכיח כי

טענה

$$R(s,t) \le R(s-1,t) + R(s,t-1)$$

זו דוגמה נהדרת לכך שלעיתים נוסחאות נסיגה משמשות להוכחת חסמים!

משפט ארדש סקרס $R(s,t) \le \binom{s+t-2}{s-1}$

טענה $R(s,t) \le R(s-1,t) + R(s,t-1)$

הוכחת המשפט מהטענה

נוכיח באינדוקציה על $s+t$.

בסיס: נזכור כי $s,t \ge 2$ ולכן הבסיס הוא $R(2,2) = 2 \overset{\text{ואפילו יש שוויון}}{\le} \binom{2+2-2}{2-1}$.

צעד:

$$R(s,t) \overset{\text{טענה}}{\le} R(s-1,t) + R(s,t-1)$$

הנחת האינ', שכן $s+t$ קטן באחד

$$\le \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1}$$

$$\overset{\text{זהות פסקל}}{=} \binom{s+t-2}{s-1}$$

משפט ארדש סקרש

$$R(s,t) \le \binom{s+t-2}{s-1}$$

הוכחה

נראה שאם מספר הצמתים הוא $\overbrace{R(s-1,t)}^{A}+\overbrace{R(s,t-1)}^{B}$ אז כל צביעה בשני צבעים של K_{A+B} מכילה K_s כחול או K_t אדום. מכאן "נובע" ש- $R(s,t)\le A+B$.

משפט ארדש סקרס

$$R(s,t) \le \binom{s+t-2}{s-1}$$

הוכחה

נראה שאם מספר הצמתים הוא $\overbrace{R(s-1,t)}^{A}+\overbrace{R(s,t-1)}^{B}$ אז כל צביעה בשני צבעים של K_{A+B} מכילה K_s כחול או K_t אדום. מכאן "נובע" ש- $R(s,t)\le A+B$.

נבחין כי לא ייתכן שלצומת נתון יש לכל היותר $A-1$ שכנים כחולים ולכל היותר $B-1$ שכנים אדומים.

אכן, במקרה כזה מספר שכניו $\le A-1+B-1=A+B-2$, אך יש לו $A+B-1$ שכנים.

משפט ארדש-סקרס $R(s,t) \le \binom{s+t-2}{s-1}$

הוכחה

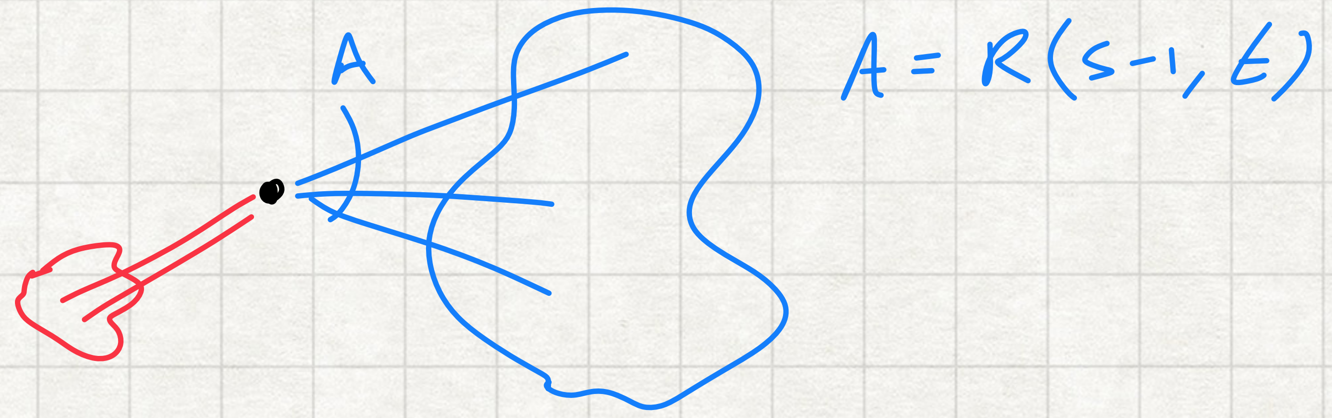
נראה שאם מספר הצמתים הוא $\underbrace{R(s-1,t)}_{A}+\underbrace{R(s,t-1)}_{B}$ אז כל צביעה בשני צבעים של K_{A+B}

מכילה K_s כחול או K_t אדום. מכאן "נקבל" ש- $R(s,t)\le A+B$.

נבחין כי לא "יתכן" שלצומת נתון יש לכל היותר $A-1$ שכנים כחולים ולכל היותר $B-1$ שכנים אדומים.

אחרת, במקרה כזה מספר שכניו $\ge A-1+B-1=A+B-2$, אך יש לו $A+B-1$ שכנים.

נניח בה"כ שיש לצומת כלשהו A "שכנים כחולים" לפחות.



הוכחה

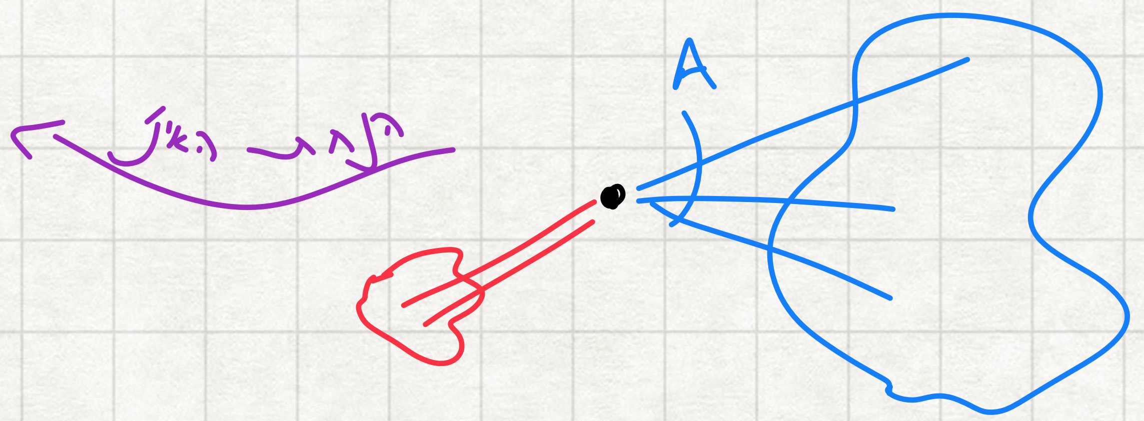
נראה שאם מספר הצמתים הוא $\underbrace{R(s-1,t)}_{A}+\underbrace{R(s,t-1)}_{B}$ אז כל צביעה בשני צבעים של K_{A+B}

מכילה K_s כחול או K_t אדום. מכאן "נובע" ש- $R(s,t)\leq A+B$.

נבחין כי לא "יתכן" שלצומת נתון יש לכל היותר $A-1$ שכנים כחולים ולכל היותר $B-1$ שכנים אדומים.

אחרת, במקרה כזה מספר שכניו $\leq A-1+B-1=A+B-2$, אך יש לו $A+B-1$ שכנים.

נניח בה"כ שיש לצומת כלשהו A "שכנים כחולים" לפחות.



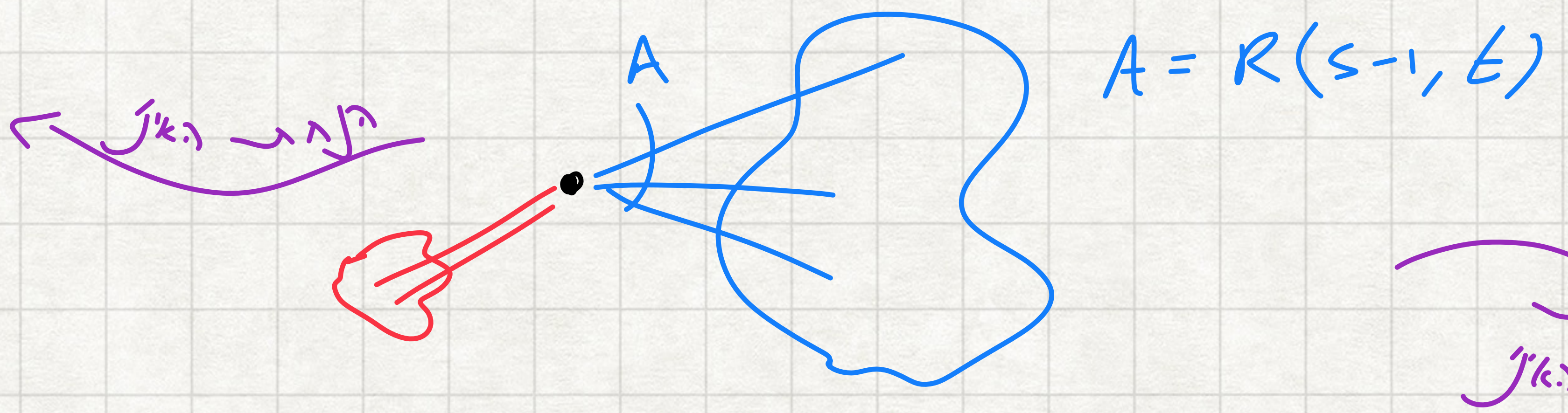
$A=R(s-1,t)$

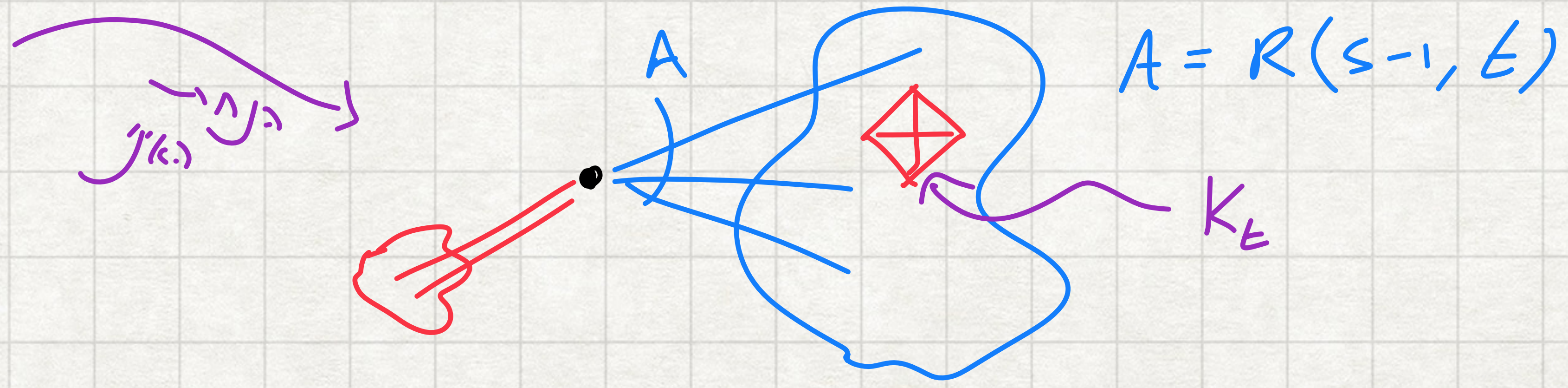
הוכחה

נראה שאם מספר הצמתים הוא $\overbrace{R(s-1,t)}^{A}+\overbrace{R(s,t-1)}^{B}$ אז כל צביעה בשני צבעים של K_{A+B} מכילה K_s כחול או K_t אדום. מכאן "נובע" ש- $R(s,t)\le A+B$.

נבחין כי לא "יתכן" שלצומת נתון יש לכל היותר $A-1$ שכנים כחולים ולכל היותר $B-1$ שכנים אדומים.
אחרת, במקרה כזה מספר שכניו $\le A-1+B-1=A+B-2$, אך יש לו $A+B-1$ שכנים.

נניח בה"כ שיש לצומת כלשהו A "שכנים כחולים" לפחות.





הוכחה

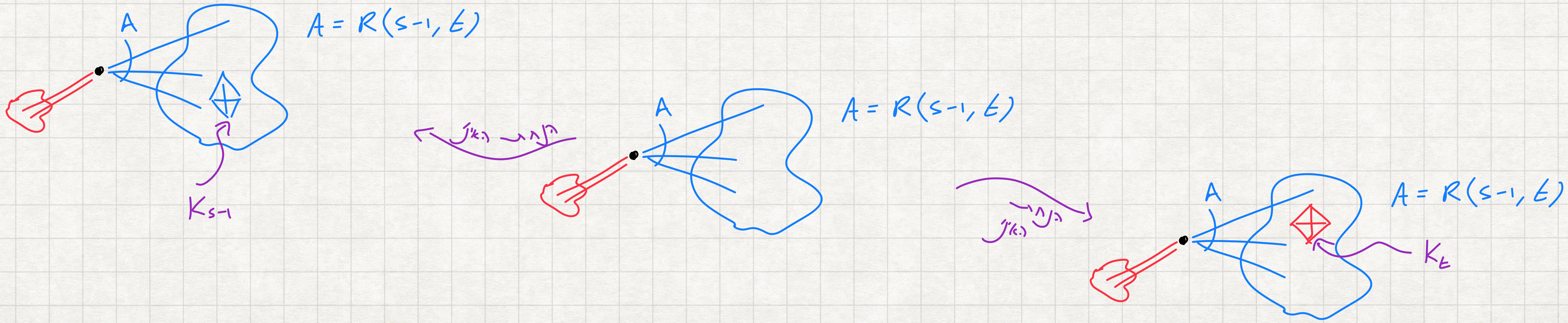
נראה שאם מספר הצמתים הוא $\overbrace{R(s-1,t)}^{A}+\overbrace{R(s,t-1)}^{B}$ אז כל צביעה בשני צבעים של K_{A+B}

מכילה K_s כחול או K_t אדום. מכאן "נובע" ש- $R(s,t)\le A+B$.

נבחין כי לא "יתכן" שלצומת נתון יש לכל היותר $A-1$ שכנים כחולים ולכל היותר $B-1$ שכנים אדומים.

אחרת, במקרה כזה מספר שכניו $\le A-1+B-1=A+B-2$, אך יש לו $A+B-1$ שכנים.

נניח בה"כ שיש לצומת כלשהו A "שכנים כחולים" לפחות.



רגע...

את ההוכחה התחלנו כך:

הוכחה

נראה שאם מספר הצמתים הוא $\overbrace{R(s-1,t)}^{A}+\overbrace{R(s,t-1)}^{B}$ אז כל צביעה בשני צבעים של K_{A+B} מכילה K_s כחול או K_t אדום. מכאן "נובע" ש- $R(s,t)\leq A+B$.

רגע...

את ההוכחה התחלנו כך:

הוכחה

נראה שאם מספר הצמתים הוא $\overbrace{R(s-1,t)}^{A}+\overbrace{R(s,t-1)}^{B}$ אז כל צביעה בשני צבעים של K_{A+B} מכילה K_s כחול או K_t אדום. מכאן "נובע" ש- $R(s,t)\le A+B$.

יש כאן הנחה סמויה
ש- $R(s,t-1)$ ו- $R(s-1,t)$
סופיים!

על כן הדרך הנכונה לבנות את ההוכחה היא באינ' על $s+t$?!