

מבחן - מועד א - פתרון

תאריך: 24/08/2025

סגל הקורס: מיכל פלדמן, אמיר רובינשטיין, יואב בן שמעון, יואב גל-צור, תומר מנקט, מיה שלינגר, איתי תשובה

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- השימוש במחשבון אסור.
- השימוש בחומר עזר אסור פרט לדף $A4$ דו-צדדי או שני דפי $A4$ חד-צדדיים. לקבוצות B, C ואחרים הזכאים לדף מורחב מותר השימוש בשני דפי $A4$ דו-צדדיים או ארבעה דפי $A4$ חד-צדדיים.
- את התשובות יש לרשום רק על טופס הבחינה. מחברת הבחינה משמשת כטיוטה ולא תיבדק.
- יש לרשום מספר ת.ז. ומספר מחברת בראש כל אחד מהדפים בטופס.
- בטופס 8 עמודים, לא כולל עמוד זה, הכוללים 5 שאלות, ושאלת בונוס נוספת לקבוצות B, C , ועמוד עם מסגרת נוספת למקרה הצורך.
- יש לכתוב את כל התשובות במקום המוקצב ובכתב קריא. תשובות ובהן חריגות לא זניחות מהמקום המוקצב, או תשובות הכתובות בכתב קטן באופן קיצוני או לא ברור לא ייקראו ולא יקבלו ניקוד, או שיקבלו ניקוד חלקי בלבד. תשובות שדורשות מאמצים רבים להבנתן גם כן עלולות לגרור הורדת ציון.
- לכן, מומלץ בחום לפתור ראשית במחברת ואז לרשום פתרון מסודר במסגרת.
- בתשובות מותר להשאיר סימונים שנלמדו עבור ספירות בסיסיות (עצרת, $S(n, k)$, מקדם בינומי וכדומה), מספרי פיבונאצ'י (F_n) , מספרי קטלן (C_n) , מספרי בל (B_n) , מספרי סטירלינג מהסוג השני $(\{n\}_k)$, דוור שיכור (D_n) , וסימונים נוספים שראינו בהרצאה.
- מותר להשתמש בכל טענה מההרצאות ללא הוכחה, ובלבד שהיא מצוטטת כראוי.
- בשאלה עם מספר סעיפים, ניתן להשתמש בתשובה מהסעיף הקודם גם אם לא פתרתם אותו. לדוגמה, התשובה של סעיף 2 יכולה להיות התשובה של סעיף 1, בחזקת 3.
- אין לרשום נימוק בשאלות בהן יש לספק תשובה סופית בלבד.
- בשאלות בחירה מרובה יש לבחור תשובה אחת בלבד.
- בשאלות שאינן שאלות בחירה מרובה ("פתוחות") ניתן לרשום "אינני יודע/ת" כתשובה לשאלה או סעיף שלה, פרט לשאלת הבונוס, ולקבל 20% מהניקוד. במקרה זה אין להוסיף שום הסבר.

בהצלחה!

שאלה 1 (5 נקודות) **בנוס** לקבוצות (B, C) בכמה דרכים ניתן להושיב 5 ילדים (שונים זה מזה) בשורה עם 15 כסאות, כך שלא יהיו שני ילדים היושבים על שני כסאות הצמודים זה לזה? רשמו תשובה סופית בלבד. תשובה עם סימן סכימה לא תקבל ניקוד מלא.

תשובה סופית: מיקום הילדים בכיסאות הוא כמו מספר הפתרונות למשוואה $x_1 + \dots + x_6 = 10$ כאשר $x_1, x_6 \geq 0, x_2, \dots, x_5 \geq 1$. כלומר, $S(6, 6) = \binom{11}{6}$. כיוון שהילדים שונים זה מזה התשובה הסופית היא $5! \cdot \binom{11}{6}$ כאשר

שאלה 2 (20 נקודות)

נסמן ב a_n את מספר המחרוזות באורך n מעל $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ שלא מכילות אף אחד מהרצפים $'00', '11', '22'$.
נסמן ב b_n את מספר המחרוזות באורך n מעל $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ שלא מכילות אף אחד מהרצפים $'00', '11', '22'$ וכן הן לא מתחילות בספרה 0.

א. (7 נק') סמנו את השוויון הנכון מבין השוויונות הבאים:

I. $a_n = b_{n-1} + 4a_{n-1}$

II. $a_n = b_n + 4b_{n-1}$

III. $a_n = b_{n-1} + a_{n-1}$

IV. $a_n = b_n + b_{n-1}$

V. $b_n = a_{n-1} + 4b_{n-1}$

VI. $b_n = a_n + 4a_{n-1}$

VII. $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$

VIII. $b_n = a_n + a_{n-1}$

ב. (6 נק') רשמו ערכים $X, Y \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים: $b_n = Xb_{n-1} + Yb_{n-2}$. אין לנמק.

תשובה סופית:

$$X = 4 \quad Y = 2$$

ג. (7 נק') מצאו נוסחה סגורה עבור a_n . הראו את דרך החישוב.

תשובה: פתרון 1:

ראשית נמצא נוסחה סגורה ל b_n . על פי נוסחת הנסיגה מסעיף קודם נקבל פולינום אופייני $x^2 - 4x - 2$, עם שורשים $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-2)}}{2} = 2 \pm \sqrt{6}$. לכן הפתרון מהצורה $b_n = A(2 + \sqrt{6})^n + B(2 - \sqrt{6})^n$. מציבים תנאי התחלה $b_0 = 1, b_1 = 4$ (המחרוזת הריקה חוקית, וכל מחרוזת באורך 1 שאינה '0' חוקית) ומקבלים

$$\begin{cases} 1 = A + B \\ 4 = A(2 + \sqrt{6}) + B(2 - \sqrt{6}). \end{cases}$$

מציבים $B = 1 - A$ במשוואה השנייה ומקבלים $4 = (2 + \sqrt{6})A + (2 - \sqrt{6}) - (2 - \sqrt{6})A$. מסדרים ומקבלים $A = \frac{2 + \sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6} + 6}{12} = \frac{3 + \sqrt{6}}{6}$ ולכן $2\sqrt{6}A = 2 + \sqrt{6}$. ואז בשביל B נקבל $B = 1 - A = \frac{3 - \sqrt{6}}{6}$. מזה מקבלים

$$b_n = \frac{3 + \sqrt{6}}{6}(2 + \sqrt{6})^n + \frac{3 - \sqrt{6}}{6}(2 - \sqrt{6})^n$$

ולכן אם נציב בשוויון מסעיף א' נקבל:

$$a_n = b_n + b_{n-1} = \frac{3 + \sqrt{6}}{6}(2 + \sqrt{6})^n + \frac{3 - \sqrt{6}}{6}(2 - \sqrt{6})^n + \frac{3 + \sqrt{6}}{6}(2 + \sqrt{6})^{n-1} + \frac{3 - \sqrt{6}}{6}(2 - \sqrt{6})^{n-1}$$

זו כבר תשובה סופית טובה (כלומר, נוסחה סגורה) ואין צורך לפשט יותר את הביטוי. שימו לב שהשוויון מסעיף א מתאים רק ל $n \geq 1$, ולכן למעשה מצאנו נוסחה סגורה רק עבור $n \geq 1$. את $a_0 = 1$ ניתן להציג מפורשות בנפרד, או לשים לב שלמעשה הנוסחה הנ"ל נכונה גם כשמציבים $n = 0$, על אף שזה לא נובע מהחישוב שביצענו עד כה.

פתרון 2:

בעזרת שימוש בשני הסעיפים הקודמים נקבל עבור $n \geq 3$:

$$a_n = b_n + b_{n-1} = (4b_{n-1} + 2b_{n-2}) + (4b_{n-2} + 2b_{n-3}) = 4(b_{n-1} + b_{n-2}) + 2(b_{n-2} + b_{n-3}) = 4a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

כמו כן מתקיים $a_0 = 1, a_1 = 5$. ניתן לוודא ידנית שאכן $a_2 = 4a_1 + 2a_0 = 22$ (כל המחרוזות באורך 2 פרט לשלושה שאסורות). כלומר נוסחת הנסיגה מתאימה לכל $n \geq 2$ ולא רק החל מ 3. כעת, נמצא פתרון סגור בעזרת פולינום אופייני. כמו בדרך הפתרון הקודמת מתקבל פתרון מהצורה $a_n = A(2 + \sqrt{6})^n + B(2 - \sqrt{6})^n$. מציבים תנאי התחלה ומקבלים

$$\begin{cases} 1 = A + B \\ 5 = A(2 + \sqrt{6}) + B(2 - \sqrt{6}). \end{cases}$$

מציבים $B = 1 - A$ במשוואה השנייה ומקבלים $5 = (2 + \sqrt{6})A + (2 - \sqrt{6}) - (2 - \sqrt{6})A$. מסדרים ומקבלים $A = \frac{3 + \sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6} + 6}{12} = \frac{2 + \sqrt{6}}{4}$ ולכן $2\sqrt{6}A = 3 + \sqrt{6}$. ואז בשביל B נקבל $B = 1 - A = \frac{2 - \sqrt{6}}{4}$. לכן סה"כ:

$$a_n = \frac{2 + \sqrt{6}}{4}(2 + \sqrt{6})^n + \frac{2 - \sqrt{6}}{4}(2 - \sqrt{6})^n$$

שימו לב שהביטויים שקיבלנו בשני הפתרונות נראים שונים, אך למעשה ניתן להוכיח שהם שווים. (רמז: בביטוי שהתקבל בפתרון הראשון, הכפילו את המונה והמכנה של הנסכם השלישי ב $(2 + \sqrt{6})$ והרביע ב $(2 - \sqrt{6})$).

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי n טבעי חיובי. נתבונן בהילוכים במישור המתחילים בנקודה $(0, 0)$ ומסתיימים בנקודה $(2n, 2n)$, בהם בכל צעד זזים יחידה אחת ימינה או יחידה אחת למעלה, כלומר כל צעד הוא מהצורה

$$(x, y) \mapsto (x, y + 1) \quad \text{או} \quad (x, y) \mapsto (x + 1, y)$$

א. (10 נק') בסעיפים (1)-(2) שלהלן רשמו תשובות סופיות בלבד (אין לנמק). תשובות עם סימן סכימה לא יקבלו ניקוד מלא.

(1) הניחו כי $n = 5$ (כלומר הילוכים מ- $(0, 0)$ ל- $(10, 10)$). כמה הילוכים כנ"ל לא עוברים דרך אף אחת מהנקודות $(5, 3)$ ו- $(5, 7)$?

תשובה סופית:

$$\binom{20}{10} - 2 \cdot \binom{8}{3} \binom{12}{5} + \binom{8}{3}^2$$

(2) כעת הניחו כי $n \geq 5$. כמה הילוכים כנ"ל עוברים בנקודה $(n, 6)$ אך לא עוברים בנקודה $(n, 7)$?

תשובה סופית:

$$\binom{n+6}{6} \cdot \binom{3n-7}{n-1}$$

ב. (10 נק') יהי n טבעי וחיובי. הוכיחו את השוויון הבא באמצעות הוכחה קומבינטורית. ציינו בפירוש מה התפקיד של k .

$$\binom{4n}{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{n+k}{k} \cdot \binom{3n-k-1}{n-1}$$

תשובה: נביא הוכחה קומבינטורית: הבעיה - מספר ההילוכים מ- $(0, 0)$ ל- $(2n, 2n)$ כמתואר בתחילת השאלה. צד שמאל: ברור - כל הילוך מורכב מ- $2n$ צעדים למעלה ו- $2n$ צעדים ימינה, לכן מס' ההילוכים הוא כמס' הדרכים לבחור את $2n$ הצעדים בהם עולים מבין סה"כ $4n$ צעדים, שהוא $\binom{4n}{2n}$.

צד ימין: נפריד למקרים לפי הנקודה הגבוהה ביותר שבה ההילוך חותך את הישר $x = n$. אם נסמנה (n, k) אז $0 \leq k \leq 2n$. עבור כל k בטווח זה, נק' החיתוך הגבוהה ביותר היא (n, k) אם"ס ההילוך עובר בנקודה (n, k) ולא עובר בנקודה $(n, k+1)$. רישא של הילוך כזה היא מסלול מ- $(0, 0)$ ל- (n, k) , ויש עבורה $\binom{n+k}{k}$ אפשרויות. הצעד הבא בהילוך הוא בהכרח ימינה $(n, k) \rightarrow (n+1, k)$, ונותר לקבוע את הסיפא, שהיא הילוך מ- $(n+1, k)$ ל- $(2n, 2n)$. לכן היא מורכבת מ- $n-1$ צעדי ימינה ו- $2n-k$ צעדי למעלה, ובסה"כ יש עבורה $\binom{(n-1)+(2n-k)}{n-1} = \binom{3n-k-1}{n-1}$ אפשרויות. מעקרון הכפל ועקרון החיבור מס' ההילוכים הנ"ל בסה"כ הוא

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{n+k}{k} \cdot \binom{3n-k-1}{n-1}$$

כרצוי.

שאלה 4 (20 נקודות) יהי $n \geq 1$ טבעי כלשהו. בשאלה זו אין קשר בין הסעיפים השונים.

א. (7 נק') עבור קבוצה כלשהי $S \subseteq [n]$, איבר $x \in S$ יקרא "חציון מושלם" אם יש בדיוק אותו מספר איברים ב- S שקטנים ממש מ- x ושגדולים ממש מ- x .
 בכמה תתי קבוצות $S \subseteq [n]$ האיבר $|S| \in S$ הוא "חציון מושלם"? רשמו תשובה סופית בלבד. ניתן להשאיר סימן סכימה בתשובה הסופית.

$$\text{תשובה סופית: } \sum_{k=1}^n \binom{k-1}{(k-1)/2} \cdot \binom{n-k}{(k-1)/2} \cdot I\{k \text{ IS ODD}\}$$

ב. (5 נק') תהי $A(x)$ הפונקציה היוצרת של הסדרה a_n ותהי b_n סדרה המוגדרת להיות

$$b_n = \begin{cases} a_0 & n = 0 \\ a_n + a_{n-1} & n \geq 1 \wedge n \equiv 0 \pmod{2} \\ a_n - a_{n-1} & n \geq 1 \wedge n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

תהי $B(x)$ הפונקציה היוצרת של הסדרה b_n . סמנו את השוויון הנכון.

$$\boxed{B(x) = A(x) - xA(-x)} \quad \text{V}$$

$$\text{I. } B(x) = A(-x) + xA(-x)$$

$$B(x) = A(x) + xA(-x) \quad \text{VI}$$

$$\text{II. } B(x) = A(x)(1 - xA(x))$$

$$B(x) = A(-x) - xA(x) \quad \text{VII}$$

$$\text{III. } B(x) = A(x) + x^2A(-x)$$

$$B(x) = A(-x) + xA(x) \quad \text{VIII}$$

$$\text{IV. } B(x) = A(x)(1 + x)$$

ג. (8 נק') תהי a_k הסדרה בה האיבר ה- k הוא מספר המולטיסטס מגודל 5 המכילים מספרים טבעיים (כולל 0) וסכום איבריהן הוא k . מהי הפונקציה היוצרת של a_k ? תזכורת: מולטיסט הוא אוסף לא סדור של איברים בו יכולות להיות חזרות.

$$\boxed{\left(\frac{1}{1-x^5}\right)\left(\frac{1}{1-x^4}\right)\left(\frac{1}{1-x^3}\right)\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)} \quad \text{I}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^{4/5}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{3/5}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{2/5}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{1/5}}\right) \quad \text{II}$$

$$x^4\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^{4/5}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{3/5}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{2/5}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{1/5}}\right) \quad \text{III}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^k \quad \text{IV}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^5 \quad \text{V}$$

$$x^4\left(\frac{1}{1-x}\right)^5 \quad \text{VI}$$

$$\left(\frac{1}{1-x^5}\right)^5 \quad \text{VII}$$

$$\frac{1}{1-x-x^2-x^3-x^4-x^5} \quad \text{VIII}$$

תשובה: נסמן את איברי המולטיסט בתור $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_5$ ונבטא כל משתנה כך: $x_2 = x_1 + \delta_1$,
 $x_3 = x_1 + \delta_1 + \delta_2$ וכך הלאה. נשים לב כי a_k הוא בדיוק מספר הפתרונות למשוואה

$$5x_1 + 4\delta_2 + \dots + \delta_5 = k \quad (x_1, \delta_j \geq 0)$$

ולכן

$$F(x) = \left(\frac{1}{1-x^5}\right)\left(\frac{1}{1-x^4}\right)\left(\frac{1}{1-x^3}\right)\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

שאלה 5 (20 נקודות) שאלה זו עוסקת במטריצות טרינאריות מגודל $n \times n$ עבור n טבעי וחיובי, כלומר איברים בקבוצה $\{0, 1, 2\}^{n \times n}$. בשאלה זו אין קשר בין הסעיפים.

א. (15 נק') מטריצה $A \in \{0, 1, 2\}^{n \times n}$ תקרא אי-גיאורית אם בכל שורה ובכל עמודה ישנו לפחות מופע אחד של הספרה 2. כמה מטריצות אי-גיאוריות ישנן? ניתן לרשום תשובה סופית עם סימן סכימה. נמקו את תשובתכם.

תשובה: נסמן: $R_i = \{A \mid A_i \in \{0, 1\}^n\}$, $C_i = \{A \mid (A^T)_i \in \{0, 1\}^n\}$. נשים לב כי לכל r שורות ו- c עמודות מתקיים:

$$|R_1 \cap \dots \cap R_r \cap C_1 \cap \dots \cap C_c| = 2^{|\{A_{i,j} \mid i \in [r], j \in [c]\}|} \cdot 3^{|\{A_{i,j} \mid i \notin [r], j \notin [c]\}|} = 2^{nr+nc-rc} \cdot 3^{n^2-nr-nc+rc}$$

לפי עקרון ההכלה וההדחה המשלים והסימטרי,

$$\bigcap_{i \in [n]} (\bar{R}_i \cap \bar{C}_i) = \sum_{r=0}^n \sum_{c=0}^n (-1)^{r+c} \binom{n}{r} \binom{n}{c} 3^{(n-r)(n-c)} \cdot 2^{nr+nc-rc}$$

פתרון נוסף: נגדיר את העולם שלנו בתור מספר המטריצות עם הספרה 2 מופיעה בכל שורה. טיעון ספירה פשוט מוביל לכך ש- $|U| = (3^n - 2^n)^n$. כעת נסמן ב- A_i את קבוצת המטריצות ללא 2 בעמודה ה- i (אבל עם 2 בכל שורה, כאמור). אותו טיעון ספירה כמו קודם מראה שהחיתוך של כל k קבוצות כאלה הוא מגודל $|\cap_{i \in [k]} \bar{A}_i| = (2^k(3^{n-k} - 2^{n-k}))^n$. אנחנו מחפשים את $|\cap_{i \in [n]} \bar{A}_i| = |U| - |\cup_i A_i|$.

$$|\cap_i \bar{A}_i| = (3^n - 2^n)^n - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (2^k(3^{n-k} - 2^{n-k}))^n$$

טעות נפוצה: להגדיר A_i המטריצות בהן אין 2 בשורה ובעמודה ה- i ולחשב את $|\cap_i \bar{A}_i|$. יש כאן טעות לוגית בסיסית: $\bar{A}_i$ היא קבוצת כל המטריצות בהן בשורה ה- i או בעמודה ה- i יש 2. ולכן החיתוך שלהן איננו הפתרון.

טעות נפוצה: לחשב כמה מטריצות עם מופע אחד לפחות של 2 בכל שורה, אבל לא להתחשב בעמודות. **טעות לא מאוד נפוצה אך משמעותית:** לנסות לבנות מטריצה חוקית בעזרת חוק הכפל ולא לקחת בחשבון שיש ספירה כפולה.



ב. (5 נק') בכמה מטריצות $M \in \{0, 1, 2\}^{n \times n}$ מופיעה הספרה 2 פעם אחת בלבד בכל אחד מהאלכסונים המקבילים לאלכסון הראשי (ראו תמונה)? רשמו תשובה סופית בלבד, ללא נימוק. תשובה עם סימן סכימה לא תקבל ניקוד מלא.

תשובה סופית:

$$\binom{n}{1} \cdot 2^{n-1} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n-1} \binom{k}{1} 2^{k-1} \right)^2 = n \cdot 2^{n-1} \cdot ((n-1)! 2^{(n-1)(n-2)/2})^2 = n!(n-1)! 2^{n^2-2n+1}$$

שאלה 6 (20 נקודות) יהי $n \geq 2$. עבור תמורה כלשהי $\pi : [n] \rightarrow [n]$ נגדיר גרף פשוט ולא מכוון $G_\pi = ([n], E)$ על הקודקודים $\{1, \dots, n\}$. בגרף זה יש קשת בין שני איברים אם ורק אם הם התמונה תחת π של שני מספרים עוקבים. כלומר,

$$E = \{\{i, j\} \mid \exists k \in [n-1] \quad \pi(k) = i \wedge \pi(k+1) = j\}$$

א. (8 נק') הוכיחו או הפריכו: לכל תמורה π מתקיים כי G_π הוא עץ.

תשובה: הגרף הוא עץ. הגרף המתואר הוא גרף שרוך שקצה אחד שלו הוא $\pi(1)$ וקצה אחר הוא $\pi(n)$.

ב. (6 נק') הסתכלו על קבוצת כל הגרפים G_π עבור תמורה כלשהי π :

$$\mathcal{G} = \{G_\pi \mid \pi : [n] \rightarrow [n] \text{ היא תמורה}\}$$

מהו גודל הקבוצה? רשמו תשובה סופית בלבד. תשובה עם סימן סכימה לא תקבל ניקוד מלא.

תשובה סופית: $\frac{n!}{2}$. שימו לב כי כל שתי פרמוטציות שהן תמונת מראה אחת של השנייה, משרות את אותו הגרף. פורמלית, עבור פרמוטציה π כלשהי, תהי π' הפרמוטציה המקיימת לכל $k \in \{1, \dots, n\}$, $\pi'(k) = \pi(n - k + 1)$, אז $G_\pi = G_{\pi'}$.

ג. (6 נק') כמה גרפים בקבוצה מהסעיף הקודם **אינם** איזומורפיים לגרף G_I כאשר I היא פונקציית הזהות? רשמו תשובה סופית בלבד.

תשובה סופית: 0

מסגרת נוספת למקרה הצורך: