

מבחן - מועד ב

תאריך: 27/09/2024

סגל הקורס: מיכל פלדמן, אמיר רובינשטיין, יותם דביר, יואב גל-צור, תומר מנקט, רז לוטן, איתי תשובה

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- השימוש במחשבון אסור.
- השימוש בחומר עזר אסור פרט לדף A4 דו-צדדי או שני דפי A4 חד-צדדיים. לקבוצה 28 ואחרים הזכאים לדף מורחב מותר השימוש בשני דפי A4 דו-צדדיים או ארבעה דפי A4 חד-צדדיים.
- את התשובות יש לרשום רק על טופס הבחינה. מתברת הבחינה משמשת כטייטה ולא תיבדק.
- יש לרשום מספר ת.ז. ומספר מחברת בראש כל אחד מהדפים בטופס.
- בטופס 7 עמודים, לא כולל עמוד זה, הכוללים 5 שאלות, ושאלת בונוס נוספת לקבוצה 28, ועמוד עם מסגרת נוספת למקרה הצורך.
- ערכן של כל 5 השאלות, להוציא שאלת הבונוס, מסתכם ל-100 נקודות. ערכה של שאלת הבונוס הוא 5 נקודות, כך שסטודנטים מקבוצה 28 יכולים להגיע לציון של 105 נקודות. בכל מקרה, ציון המבחן הסופי יעוגל למטה, במקרה הצורך, ל-100.
- יש לכתוב את כל התשובות במקום המוקצב ובכתב קריא. תשובות ובהן חריגות לא זניחות מהמקום המוקצב, או תשובות הכתובות בכתב קטן באופן קיצוני או לא ברור לא ייקראו ולא יקבלו ניקוד, או שיקבלו ניקוד חלקי בלבד. תשובות שדורשות מאמצים רבים להבנתן גם כן עלולות לגרור הורדת ציון.
- לכן, מומלץ בחום לפתור ראשית במחברת ואז לרשום פתרון מסודר במסגרת.
- ניתן לרשום "אינני יודע/ת" כתשובה לשאלה או סעיף שלה, פרט לשאלת הבונוס, ולקבל 20% מהניקוד. במקרה זה אין להוסיף שום הסבר ו/או לסמן את אחת האפשרויות.
- בתשובות מותר להשאיר סימונים שנלמדו עבור ספירות בסיסיות (עצרת, מקדם בינומי), מספרי פיבונאצ', מספרי קטלאן, מספרי בל, מספרי סטרלינג מהסוג השני, דוור שיכור, וסימונים נוספים שראינו בהרצאה.

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות) לכל $n \geq 2$ טבעי, נסמן ב- a_n את מספר הגרפים $G = \langle V, E \rangle$ (הפשוטים ולא מכוונים) שבהם $V = [n]$, ובנוסף, לצמתים n ו- $n-1$ אין שכן משותף.

א. (15 נק') השתמשו בעקרון ההכלה וההדחה כדי לקבל נוסחה סגורה לאיבר הכללי a_n ($n \geq 2$ טבעי). ניתן להשאיר סכימה בתשובתכם.

תשובה סופית:

הסבר:

ב. (10 נק') חשבו את a_{50} . יש לתת תשובה מספרית ללא שימוש בסימן סכימה.

תשובה סופית:

הסבר:

שאלה 2 (25 נקודות) נאמר שגרף הוא **מוקלק** אם כל רכיב קשירות בו הוא קליקה.

א. (10 נק') יהי גרף מוקלק בו הדרגה המקסימלית של קדקוד היא $D > 1$. מצאו את מספר הצביעה של G (כפונקציה של D). יש להוכיח את נכונות התשובה.

תזכורת: מספר הצביעה של גרף הוא המספר המינימלי של צבעים שצריך כדי לצבוע את קדקודי הגרף כך שלא קיימים שני קדקודים באותו צבע המחוברים בקשת.

מספר הצביעה:
הוכחה:

ב. (10 נק') נסמן ב a_n את מספר הגרפים המוקלקים שקבוצת קדקודיהם $[n] = \{1, \dots, n\}$. מצאו נוסחה ל- a_n ללא נסיגה (מותר להשתמש סכום מוכלל).

נוסחה סגורה:

ג. (5 נק') איזו מנוסחאות הנסיגה הבאות (בתוספת תנאי התחלה מתאימים) מתאימה ל- a_n מהסעיף הקודם? הקיפו בעיגול, אין צורך בהסבר.

$$a_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} \cdot a_{n-1} \quad \text{.V}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \cdot a_{n-1} \quad \text{.I}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot a_{n-1} \quad \text{.VI}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k} \cdot a_{n-1} \quad \text{.II}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} \cdot a_{n-k} \quad \text{.VII}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \cdot a_{n-k} \quad \text{.III}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot a_{n-k} \quad \text{.VIII}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k} \cdot a_{n-k} \quad \text{.IV}$$

שאלה 3 (15 נקודות) יהי n מספר טבעי חיובי. נאמר שפונקציה $f \in [n] \rightarrow [3n]$ היא מרווחת אם לכל $1 \leq i < j \leq n$ מתקיים $f(j) - f(i) > 1$. כמה פונקציות מרווחות קיימות? (הביעו באמצעות n). תנו תשובה ללא סימן סכימה והסבירו בקצרה.

תשובה סופית:

הסבר:

שאלה 4 (15 נקודות) יהי n מספר טבעי חיובי. כמה פונקציות $f \in [2n] \rightarrow [2n]$ מקיימות $f \circ f = \text{Id}$ (כאשר Id היא פונקציית הזהות על הקבוצה $[2n]$)? ניתן להשאיר סכימה בתשובתכם. הסבירו בקצרה.

תשובה סופית:

הסבר:

שאלה 5 (20 נקודות) לכל n טבעי, נסמן ב- b_n את מספר המחרוזות באורך n מהתווים $\{A, B, C, D, 1, 2, 3\}$ שאין בהן זוג ספרות סמוכות. למשל, המחרוזת $A1B3$ היא מחרוזת חוקית באורך 4, אך המחרוזות $A131$ ו- $A13B$ אינן מחרוזות חוקיות באורך 4.

א. (12 נק') מצאו נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית מסדר לכל היותר שתיים ותנאי התחלה עבור b_n . הסבירו בקצרה.

תשובה סופית:

הסבר:

ב. (8 נק') מצאו נוסחה סגורה לאיבר הכללי של b_n .

תשובה סופית:

הסבר:

שאלה 6 (5 נקודות בונוס לקבוצה 28) בפסטיבל 3 דוכנים: דוכן גלידה, דוכן פיצה ודוכן פלאפל. בכמה דרכים יכולים n אנשים (רעבים) המשתתפים בפסטיבל להסתדר בתורים לדוכנים (כל אדם בתור אחד בדיוק), כך שבתור לגלידה יהיו לפחות k אנשים? (ניתן להניח כי $k < n$). הקיפו בעיגול את התשובה הנכונה, אין צורך בהסבר.

$$n! \cdot \binom{n-k+2}{2} \text{ .V} \qquad \binom{n-k+2}{2} \text{ .I}$$

$$n! \cdot \binom{n-k+1}{2} \text{ .VI} \qquad \binom{n-k+1}{2} \text{ .II}$$

$$n! \cdot \binom{n+k+2}{2} \text{ .VII} \qquad \binom{n+k+2}{2} \text{ .III}$$

$$n! \cdot \binom{n+k+1}{2} \text{ .VIII} \qquad \binom{n+k+1}{2} \text{ .IV}$$

מסגרת נוספת למקרה הצורך:

