משחק CHSH, אי־שוויון בל וחסם צירלסון

1 המשחק

במשחק CHSH משתתפים שני שחקנים משתפי פעולה: אליס ובוב. מותר להם לתאם אסטרטגיה מראש, אבל אסור להם לתקשר במהלך המשחק. שופט בוחר שני ביטים $x, y \in \{0,1\}$ באופן אחיד ובלתי תלוי. הוא שולח לאליס את x ולבוב את y. אליס ובוב מחזירים, בהתאמה, תשובות $a, b \in \{0,1\}$, והם מנצחים אם

$$a \oplus b = x \wedge y.$$

כלומר, בשלושה מארבעת זוגות הקלטים הם צריכים להחזיר את אותה תשובה, ורק כאשר שניהם מקבלים 1 הם צריכים להחזיר תשובות שונות.

x	y	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

על פניו זה לא משחק מסעיר במיוחד. האסטרטגיה $a = b = 0$ מצליחה בהסתברות $3/4$, וקל להראות שאין אסטרטגיה קלאסית טובה יותר. למעשה, אפילו אקראיות משותפת, shared randomness, אינה עוזרת.

כדי לראות זאת, נתחיל באסטרטגיה דטרמיניסטית. נסמן את התשובות של אליס בשני הקלטים ב־ a_0, a_1, ואת התשובות של בוב ב־ b_0, b_1. כדי לנצח בכל ארבעת המקרים צריך שיתקיים

$$\begin{aligned} a_0 \oplus b_0 &= 0, & a_0 \oplus b_1 &= 0, \\ a_1 \oplus b_0 &= 0, & a_1 \oplus b_1 &= 1. \end{aligned}$$

אבל אם נחבר את ארבע המשוואות מודולו 2, כל משתנה באגף שמאל יופיע פעמיים, ונקבל $0 = 1$. לכן כל אסטרטגיה דטרמיניסטית נכשלת לפחות באחד מארבעת הקלטים. אם השחקנים נעזרים באקראיות, נקבע את כל הביטים האקראיים שלהם ונקבל אסטרטגיה דטרמיניסטית. מיצוע על הבחירה האקראית אינו יכול להעלות את הסתברות ההצלחה מעל $3/4$. כאן, כמובן, מניחים שהאקראיות המשותפת אינה תלויה בקלטים שהשופט בוחר.

מה שהופך את המשחק למעניין הוא שאם אליס ובוב חולקים זוג EPR, הם יכולים להצליח בהסתברות

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \approx 0.85355.$$

הם אינם מתקשרים במהלך המשחק; כל אחד רק מודד את הקיוביט שלו.

2 קצת היסטוריה

- **1935:** איינשטיין, פודולסקי ורוזן מפרסמים את מאמר EPR. השאלה שהם מעלים היא האם המצב הקוונטי מתאר את כל מה שקיים במערכת, או שיש במציאות פרטים נוספים שהתיאור הקוונטי אינו כולל.

נציג את הרעיון בשפה של קיוביטים. זהו ניסוח מודרני של הטיעון; המאמר המקורי עסק במקום ובתנע. נניח שאליס ובוב רחוקים זה מזה וחולקים את המצב

$$|\Phi^+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|{+}{+}\rangle + |{-}{-}\rangle}{\sqrt{2}}.$$

אם אליס מודדת בבסיס החישובי, היא יכולה להסיק מהתוצאה שלה, בוודאות, מה יקבל בוב אם גם הוא ימדוד בבסיס החישובי. אם היא מודדת בבסיס $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, היא יכולה להסיק, שוב בוודאות, מה יקבל בוב אם ימדוד בבסיס הזה.

כאן נכנסת הנחת המקומיות: הבחירה של אליס מה למדוד, והמדידה שהיא מבצעת, אינן משנות את המציאות הפיזיקלית אצל בוב. לכך מצרפים המחברים קריטריון: אם אפשר לנבא בוודאות את ערכו של גודל פיזיקלי בלי להפריע למערכת, יש לראות בערך הזה תכונה ממשית של המערכת.

לפי הקריטריון הזה, המדידה של אליס מאפשרת להסיק שלתוצאת המדידה של בוב בבסיס החישובי יש ערך מוגדר. אבל אליס הייתה יכולה לבחור למדוד בבסיס האחר, ואז להסיק שגם לתוצאת המדידה של בוב בבסיס האחר יש ערך מוגדר. לפי הנחת המקומיות, מה שקיים אצל בוב אינו יכול להיות תלוי בבחירה הזו. מכאן, לטענתם, ששני הערכים צריכים להיות מוגדרים גם יחד.

אלא שאין מצב של קיוביט שבו תוצאות המדידה בשני הבסיסים האלה מוגדרות בוודאות: מצב שנותן תוצאה ודאית בבסיס אחד נותן תוצאה אחידה בבסיס האחר. לכן, אם מקבלים את הנחות הטיעון, המצב הקוונטי אינו מתאר את כל התכונות הממשיות של המערכת. במובן הזה התיאור הקוונטי אינו שלם.

שימו לב: אליס אינה מודדת בשני הבסיסים באותו ניסוי. הטיעון נשען על האפשרות שלה לבחור ביניהם, ועל ההנחה שהבחירה הזו אינה משנה את מה שקיים אצל בוב.

MAY 15, 1935 PHYSICAL REVIEW VOLUME 47

Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

A. EINSTEIN, B. PODOLSKY AND N. ROSEN, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*

(Received March 25, 1935)

In a complete theory there is an element corresponding to each element of reality. A sufficient condition for the reality of a physical quantity is the possibility of predicting it with certainty, without disturbing the system. In quantum mechanics in the case of two physical quantities described by non-commuting operators, the knowledge of one precludes the knowledge of the other. Then either (1) the description of reality given by the wave function in quantum mechanics is not complete or (2) these two quantities cannot have simultaneous reality. Consideration of the problem of making predictions concerning a system on the basis of measurements made on another system that had previously interacted with it leads to the result that if (1) is false then (2) is also false. One is thus led to conclude that the description of reality as given by a wave function is not complete.

1.

ANY serious consideration of a physical theory must take into account the distinction between the objective reality, which is independent of any theory, and the physical concepts with which the theory operates. These concepts are intended to correspond with the objective reality, and by means of these concepts we picture this reality to ourselves.

In attempting to judge the success of a physical theory, we may ask ourselves two questions: (1) "Is the theory correct?" and (2) "Is the description given by the theory complete?" It is only in the case in which positive answers may be given to both of these questions, that the concepts of the theory may be said to be satisfactory. The correctness of the theory is judged by the degree of agreement between the conclusions of the theory and human experience. This experience, which alone enables us to make inferences about reality, in physics takes the form of experiment and measurement. It is the second question that we wish to consider here, as applied to quantum mechanics.

Whatever the meaning assigned to the term *complete*, the following requirement for a complete theory seems to be a necessary one: *every element of the physical reality must have a counterpart in the physical theory*. We shall call this the condition of completeness. The second question is thus easily answered, as soon as we are able to decide what are the elements of the physical reality.

The elements of the physical reality cannot be determined by *a priori* philosophical considerations, but must be found by an appeal to results of experiments and measurements. A comprehensive definition of reality is, however, unnecessary for our purpose. We shall be satisfied with the following criterion, which we regard as reasonable. *If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e., with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity.* It seems to us that this criterion, while far from exhausting all possible ways of recognizing a physical reality, at least provides us with one

- **1964:** ג'ון בל חוזר לאפשרות שהתיאור הקוונטי אינו שלם: אולי יש למערכת תכונות נוספות, המכונות **משתנים חבויים**, שבעזרתן אפשר להסביר את תוצאות המדידה תוך שמירה על מקומיות?

בל מראה שלא ניתן לשחזר כך את כל התחזיות הקוונטיות. מודלים של משתנים חבויים מקומיים, שבהם בחירות המדידה בלתי תלויות במשתנים החבויים, מקיימים אילוצים על הקורלציות בין התוצאות. האילוצים האלה מכונים **אי־שוויונות בל**. תורת הקוונטים, לעומת זאת, מנבאת מצבים ומדידות שמפרים אותם.

כך מתקבלת דרך להכריע בניסוי בין תחזיות שונות: אפשר להכין מערכות שזורות, למדוד אותן ולבדוק אם הקורלציות מקיימות את אי־השוויון. שימו לב שהמקומיות היא חלק מהותי מהטענה: משפט בל אינו שולל כל תיאוריה של משתנים חבויים.

- **1969:** קלוזר, הורן, שמעוני והולט, Clauser, Horne, Shimony and Holt, **מציגים את אי־שוויון** CHSH. זהו ניסוח של רעיון בל שמתאים יותר לבדיקה ניסויית, ואינו דורש קורלציות מושלמות בין תוצאות המדידה.

בכל צד בוחרים אחת משתי מדידות אפשריות, ולכל מדידה שתי תוצאות אפשריות. נשמע מוכר? אלה בדיוק הקלטים והפלטים של המשחק שהגדרנו. משחק CHSH הוא ניסוח של אותו אילוץ במונחים של

הסתברות ניצחון: אסטרטגיות מקומיות עם אקראיות משותפת אינן יכולות לעבור את החסם $3/4$, ואילו מדידות על מצב שזור מאפשרות לעבור אותו.

- **1972:** סטיוארט פרידמן וג'ון קלוזר מודדים קורלציות בין קיטובים של זוגות פוטונים, ומוצאים הפרה של אי־שוויון בל, בהתאם לתחזיות הקוונטיות.

זו עדות ניסויית חשובה נגד מודלים של משתנים חבויים מקומיים, אבל הניסוי עדיין נשען על הנחות נוספות. למשל, רק חלק מהפוטונים מתגלים בפועל. כדי להסיק מהמדידות על כלל הזוגות, צריך להניח שהזוגות שהתגלו הם מדגם מייצג. מגבלות כאלה משאירות **פרצות ניסוייות**: אפשרויות שבהן מודל מקומי עשוי להסביר את הנתונים אם ההנחות הנוספות אינן מתקיימות.

- **1982:** אלן אספה ועמיתיו מבצעים ניסוי שבו הגדרות המדידה משתנות במהירות בזמן שהפוטונים נמצאים בדרכם אל מכשירי המדידה. גם בניסוי הזה נצפית הפרה של אי־שוויון בל.

הרעיון הוא לצמצם את האפשרות להסביר את הקורלציות באמצעות מידע על הגדרות המדידה שהיה זמין מראש, או באמצעות אות שעובר בין שני הצדדים במהלך הניסוי. זהו צעד חשוב בטיפול בפרצת המקומיות, אך עדיין לא ניסוי שסוגר בו־זמנית את כל הפרצות המרכזיות.

- **2015:** שלוש קבוצות מחקר מבצעות ניסויים שבהם נסגרות בו־זמנית שתי הפרצות הניסוייות המרכזיות.

פרצת הגילוי נסגרת באמצעות ניסוי וניתוח שאינם דורשים להניח שהאירועים שהתגלו הם מדגם מייצג של כלל האירועים.

פרצת המקומיות נסגרת באמצעות מרחק ותזמון מתאימים: בחירת המדידה בכל צד והפקת התוצאה בצד האחר מתרחשות כך שאות הנע במהירות האור אינו יכול להעביר את הבחירה אל הצד האחר לפני שתוצאתו נקבעת.

גם בתנאים האלה נצפית הפרה של אי־שוויון בל. ניסויים כאלה מכונים loophole-free Bell tests. הכינוי מתייחס לסגירת הפרצות הניסוייות המרכזיות; הוא אינו מבטל את ההנחות שביסוד משפט בל, ובהן אי־התלות של בחירות המדידה במשתנים החבויים.

- **2022:** אלן אספה, ג'ון קלוזר ואנטון צייליגר זוכים בפרס נובל לפיזיקה על ניסויים בפוטונים שזורים, על ביסוס ההפרה של אי־שוויונות בל ועל תרומות חלוציות למדע המידע הקוונטי. כך זוכה להכרה גם התפקיד של השזירה כמשאב: אותה תופעה שעוררה את שאלת השלמות של התיאור הקוונטי מאפשרת משימות חדשות של עיבוד והעברת מידע.

3 האסטרטגיה הקוונטית

אליס ובוב חולקים מראש את המצב

$$|\Phi^+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}.$$

כל אחד מהם מתרגם את הקלט שלו לבחירה של בסיס מדידה, ומחזיר ביט בהתאם לתוצאת המדידה.

3.1 הבסיסים

הפרוטוקול של אליס פשוט:

- אם $x = 0$, היא מודדת בבסיס החישובי ומחזירה $a = 0$ עבור $|0\rangle$, ו־ $a = 1$ עבור $|1\rangle$.
- אם $x = 1$, היא מודדת בבסיס $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ ומחזירה $a = 0$ עבור $|+\rangle$, ו־ $a = 1$ עבור $|-\rangle$.

כדי לתאר את הבסיסים של בוב, נסמן

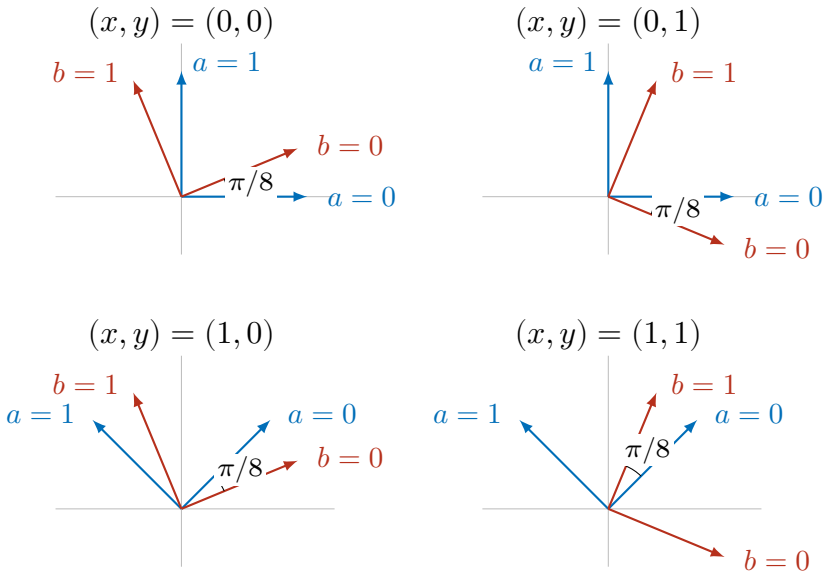
$$|v_0(\theta)\rangle = \cos\theta\ |0\rangle + \sin\theta\ |1\rangle\,,$$
$$|v_1(\theta)\rangle = -\sin\theta\ |0\rangle + \cos\theta\ |1\rangle\,.$$

לכל זווית θ זהו בסיס אורתונורמלי. בוב מודד בבסיס הזה עם הזווית

$$\theta = \begin{cases} \pi/8, & y = 0, \\ -\pi/8, & y = 1, \end{cases}$$

ומחזיר $b = 0$ עבור הווקטור הראשון, ו־ $b = 1$ עבור השני.

הזוויות של אליס בתיאור הזה הן 0 ו־ $\pi/4$. בזווית השנייה מתקבל $|v_1(\pi/4)\rangle = -|-\rangle$, אבל הסימן הכולל אינו משנה את המדידה.



איור 1: בסיסי המדידה בארבעת זוגות הקלטים: אליס בכחול ובוב באדום. האיור מציג את מישור האמפליטודות הממשיות בבסיס החישובי, ולא את כדור בלוך.

3.2 למה האסטרטגיה עובדת?

המקרה $x = y = 0$. אליס מודדת בבסיס החישובי. בהסתברות $1/2$ מתקבלת התוצאה $a = 0$, והמצב המשותף לאחר המדידה הוא $|00\rangle$. במקרה זה בוב מחזיק בקיוביט במצב $|0\rangle$, וההסתברות שימדוד $b = 0$ היא

$$\left|\langle v_0(\pi/8)|0\rangle\right|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

אם אליס מודדת $a = 1$, המצב המשותף הוא $|11\rangle$, וההסתברות שבוב ימדוד $b = 1$ היא אותה הסתברות. לכן הם מחזירים תשובות שוות, כפי שנדרש, בהסתברות $\cos^2(\pi/8)$.

המקרה $x = 0, y = 1$. הניתוח זהה, אלא שהזווית $\pi/8$ מוחלפת ב־ $-\pi/8$. מכיוון שריבוע הקוסינוס אינו משתנה, גם כאן הסתברות ההצלחה היא $\cos^2(\pi/8)$.

כדי לטפל בשני המקרים הנותרים, נבחין כי $|{--}\rangle + |{++}\rangle = |00\rangle + |11\rangle$, ולכן

$$|\Phi^+\rangle = \frac{|{++}\rangle + |{--}\rangle}{\sqrt{2}}.$$

כאשר אליס מודדת בבסיס $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, כל תוצאה מתקבלת בהסתברות $1/2$, ובהתניה בתוצאה שלה גם הקיוביט של בוב נמצא באותו מצב.

המקרה $x = 1, y = 0$. זה אותו רעיון כמו במקרה הראשון, רק בבסיס מסובב. למשל, אם אליס מחזירה $a = 0$, הקיוביט של בוב נמצא במצב $|+\rangle$, וההסתברות שיחזיר $b = 0$ היא

$$\left|\langle v_0(\pi/8)|+\rangle\right|^2 = \left(\frac{\cos(\pi/8) + \sin(\pi/8)}{\sqrt{2}}\right)^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

אותו חישוב עבור $a = 1$ נותן את אותה הסתברות לקבלת $b = 1$.

המקרה $x = y = 1$. כאן השחקנים צריכים להחזיר תשובות שונות. אם אליס מחזירה $a = 0$, בוב מחזיק במצב $|+\rangle$, וההסתברות שיחזיר $b = 1$ היא

$$\left|\langle v_1(-\pi/8)|+\rangle\right|^2 = \left(\frac{\sin(\pi/8) + \cos(\pi/8)}{\sqrt{2}}\right)^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

אם אליס מחזירה $a = 1$, בוב מחזיר $b = 0$ באותה הסתברות.

לסיכום, בכל אחד מארבעת זוגות הקלטים הסתברות ההצלחה היא $\cos^2(\pi/8)$. לכן זו גם הסתברות ההצלחה הכוללת, כאשר השופט בוחר קלטים אחידים ובלתי תלויים.

4 חסם צירלסון

האם אפשר להצליח עוד יותר? מתברר שלא: הערך שמצאנו הוא אופטימלי גם אם מאפשרים לאליס ולבוב לחלוק מצב שזור במרחב גדול יותר ולהשתמש במדידות אחרות. תוצאה זו נקראת **חסם צירלסון**, Tsirelson's bound, על שם בוריס צירלסון, שהיה פרופסור בבית הספר למדעי המתמטיקה באוניברסיטת תל אביב. החסם הוכח בשנת 1980.

4.1 מהסתברות ניצחון לקורלציות

ראשית, נחליף את הפלטים $0,1$ בפלטים $+1,-1$. נסמן את הפלטים החדשים ב־

$$\mathsf{a} = (-1)^a, \qquad \mathsf{b} = (-1)^b.$$

עבור קלטים קבועים x, y, המשתנה המציין אם השחקנים ניצחו הוא

$$\mathbf{1}_{\text{win}} = \frac{1 + (-1)^{xy}\mathsf{ab}}{2}.$$

כאן אנו משתמשים בכך שעבור ביטים, $x \wedge y = xy$, וכן $(-1)^{a \oplus b} = (-1)^a (-1)^b$.

נגדיר את הקורלציות

$$E_{xy} = \mathbb{E}[\mathsf{ab} \mid x, y].$$

התוחלת היא על תוצאות המדידות ועל כל אקראיות אחרת של האסטרטגיה. מכיוון שארבעת זוגות הקלטים שווי הסתברות,

$$\begin{aligned} p_{\text{win}} &= \frac{1}{4} \sum_{x,y \in \{0,1\}} \frac{1 + (-1)^{xy} E_{xy}}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8}(E_{00} + E_{01} + E_{10} - E_{11}). \end{aligned}$$

נסמן

$$S = E_{00} + E_{01} + E_{10} - E_{11}.$$

אם נוכיח $|S| \le 2\sqrt{2}$, נקבל בפרט

$$p_{\text{win}} \le \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

לצורך כך נעשה סטייה קצרה, שתהיה שימושית גם בהמשך הקורס.

4.2 מדידות פרויקטיביות

אפשר להכליל מעט את מודל המדידה שהכרנו. עד כה מדדנו לפי בסיס אורתונורמלי; כעת נאפשר לכל תוצאה להתאים לתת־מרחב, ולאו דווקא לווקטור בסיס יחיד.

הגדרה 4.1 (מדידה פרויקטיבית). מדידה פרויקטיבית, projective measurement, מוגדרת באמצעות משפחה של הטלות אורתוגונליות

$$\{\Pi_m : m \in \mathcal{M}\},$$

כאשר $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}$ היא קבוצה סופית של תוצאות אפשריות, ומתקיים

$$\Pi_m^\dagger = \Pi_m, \qquad \Pi_m^2 = \Pi_m, \qquad \Pi_m \Pi_n = 0 \quad (m \neq n),$$

וכן

$$\sum_{m \in \mathcal{M}} \Pi_m = I.$$

על פי כלל בורן, אם המערכת נמצאת במצב מנורמל $|\psi\rangle$, אז ההסתברות לקבל את התוצאה m היא

$$p_m = \| \Pi_m |\psi\rangle \|^2.$$

כדאי לבדוק שההסתברויות אכן מסתכמות ל־ 1:

$$\begin{aligned} \sum_m p_m &= \sum_m \langle\psi| \Pi_m^\dagger \Pi_m |\psi\rangle \\ &= \langle\psi| \left(\sum_m \Pi_m \right) |\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1. \end{aligned}$$

אם התקבלה תוצאה m שהסתברותה חיובית, המצב לאחר המדידה הוא

$$\frac{\Pi_m |\psi\rangle}{\sqrt{p_m}}.$$

4.3 אופרטורים הרמיטיים ותוחלת המדידה

במקום לשמור רשימה של הטלות ואת הערך הממשי המשויך לכל אחת מהן, אפשר לארוז את כל המידע באופרטור אחד:

$$M = \sum_{m \in \mathcal{M}} m \Pi_m.$$

אופרטור כזה נקרא **אופרטור מדידה**, או **גודל מדיד**, ובאנגלית observable. הוא הרמיטי, משום שההטלות הרמיטיות והמקדמים ממשיים. בכיוון ההפוך, משפט הפירוק הספקטרלי אומר שלכל אופרטור הרמיטי במרחב מממד סופי יש הצגה כזו: התוצאות הן הערכים העצמיים, וההטלות הן על המרחבים העצמיים המתאימים.

בעזרת האופרטור הזה אפשר לחשב בקלות את תוחלת תוצאת המדידה במצב $|\psi\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle M\rangle_\psi &= \sum_m m p_m \\ &= \sum_m m\|\Pi_m|\psi\rangle\|^2 \\ &= \langle\psi|\left(\sum_m m\Pi_m\right)|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|M|\psi\rangle\,.\end{aligned}$$

בפרט, במדידה ששתי תוצאותיה הן $+1,-1$, מתקיים

$$M=\Pi_{+1}-\Pi_{-1},\qquad M^2=\Pi_{+1}+\Pi_{-1}=I.$$

לכן אופרטור המדידה הרמיטי וגם אוניטרי.

4.4 בחזרה למשחק

נסמן ב־ A_x את אופרטור המדידה של אליס בקלט x, וב־ B_y את אופרטור המדידה של בוב בקלט y. שניהם מתארים את הפלטים לאחר המעבר ל־ ±1. האופרטורים פועלים על המרחבים המקומיים של שני השחקנים, ומתקיים

$$A_x^\dagger=A_x,\qquad A_x^2=I,\qquad B_y^\dagger=B_y,\qquad B_y^2=I.$$

לדוגמה, באסטרטגיה שהצגנו עבור אליס,

$$A_0=|0\rangle\langle 0|-|1\rangle\langle 1|=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=Z,$$
$$A_1=|+\rangle\langle +|-|-\rangle\langle -|=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=X.$$

עבור בוב נקבל

$$B_0=\frac{Z+X}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=H,$$

וכן

$$B_1 = \frac{Z - X}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = ZHZ.$$

אם המצב המשותף הוא $|\psi\rangle$, אז

$$E_{xy} = \langle\psi| A_x \otimes B_y |\psi\rangle .$$

כדי לראות זאת, נכתוב את ההטלות המתאימות לתוצאות $s, t \in \{+1, -1\}$ בתור $\Pi_s^{(x)}$ ו־ $\Gamma_t^{(y)}$. אז

$$\begin{aligned} E_{xy} &= \sum_{s,t \in \{+1,-1\}} st \ \langle\psi| \Pi_s^{(x)} \otimes \Gamma_t^{(y)} |\psi\rangle \\ &= \langle\psi| \left(\sum_s s\Pi_s^{(x)} \right) \otimes \left(\sum_t t\Gamma_t^{(y)} \right) |\psi\rangle . \end{aligned}$$

זהו בדיוק אופרטור המדידה של מכפלת שתי התוצאות.

לכן, אם נגדיר את **אופרטור CHSH** על ידי

$$C = A_0 \otimes (B_0 + B_1) + A_1 \otimes (B_0 - B_1).$$

כדי להבין מדוע האופרטור C שימושי, ניתן לכל סיבוב במשחק ציון של $+1$ אם השחקנים ניצחו, וציון של -1 אם הפסידו. אם תוצאות המדידה הן $s, t \in \{+1, -1\}$, אז הציון הוא בדיוק

$$R = (-1)^{xy} st.$$

אכן, בשלושת זוגות הקלטים שבהם $xy = 0$ רוצים שהתשובות יהיו זהות, ולכן הציון הוא st. לעומת זאת, כאשר $x = y = 1$ רוצים שהתשובות יהיו שונות, ולכן הציון הוא $-st$.

עבור קלטים x, y קבועים, תוחלת המכפלה st היא כזכור E_{xy}. מכיוון שארבעת זוגות הקלטים נבחרים באופן אחיד, נקבל

$$\mathbb{E}[R] = \frac{1}{4} \left(E_{00} + E_{01} + E_{10} - E_{11} \right) = \frac{1}{4} \langle\psi| C |\psi\rangle .$$

כלומר, האופרטור C מרכז בביטוי אחד את הציון הממוצע של האסטרטגיה.

כעת נסמן את הסתברות הניצחון ב־ p. לפי הגדרת הציון,

$$\mathbb{E}[R] = p - (1 - p) = 2p - 1,$$

ולכן

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \langle\psi| C |\psi\rangle .$$

מכאן ברור מדוע נרצה לחסום את הנורמה של C: לכל מצב מנורמל מתקיים

$$\langle\psi|\, C\, |\psi\rangle \le \|C\|,$$

ולכן חסם על הנורמה נותן מיד חסם על הסתברות הניצחון.

חשוב להדגיש שבמשחק עצמו לא מודדים את ארבעת האיברים של C באותו סיבוב. בכל סיבוב נבחר זוג קלטים אחד, והשחקנים מבצעים רק את המדידות המתאימות לו. האופרטור C הוא כלי מתמטי שמאגד את התוחלות של ארבע האפשרויות. ליניאריות התוחלת מאפשרת לעשות זאת גם כאשר המדידות אינן מתחלפות.

4.5 החסם על הנורמה

מכאן ואילך $\|T\|$ מציינת את הנורמה האופרטורית ביחס לנורמה האוקלידית:

$$\|T\| = \sup_{\|v\|=1} \|Tv\|.$$

נשתמש באי־שוויון המשולש ובזהות $\|T\otimes R\| = \|T\|\|R\|$. כמו כן, עבור אופרטור הרמיטי (ואפילו לכל אופרטור נורמלי) מתקיים $\|T^2\| = \|T\|^2$.

נסמן את הקומוטטור של שני אופרטורים ב־

$$[R,T] = RT - TR.$$

למה 4.2. *מתקיים*

$$C^2 = 4I - [A_0,A_1]\otimes[B_0,B_1],$$

כאשר באגף ימין I הוא אופרטור הזהות על המערכת המשותפת.

הוכחה. נסמן

$$P = B_0 + B_1, \qquad Q = B_0 - B_1,$$

כך ש־

$$C = A_0\otimes P + A_1\otimes Q.$$

נשתמש בכלל הכפל של מכפלות טנזוריות:

$$(R\otimes S)(T\otimes V) = RT\otimes SV.$$

לכן, בפתיחת הריבוע מתקבלים ארבעה איברים:

$$\begin{aligned}C^2 &= (A_0 \otimes P)(A_0 \otimes P) + (A_0 \otimes P)(A_1 \otimes Q) \\ &\quad + (A_1 \otimes Q)(A_0 \otimes P) + (A_1 \otimes Q)(A_1 \otimes Q) \\ &= A_0^2 \otimes P^2 + A_0 A_1 \otimes PQ \\ &\quad + A_1 A_0 \otimes QP + A_1^2 \otimes Q^2.\end{aligned}$$

מכיוון ש־ $A_0^2 = A_1^2 = I$, נקבל

$$C^2 = I \otimes (P^2 + Q^2) + A_0 A_1 \otimes PQ + A_1 A_0 \otimes QP.$$

שימו לב שלא איחדנו את שני האיברים המעורבים: אין לנו הנחה שהאופרטורים מתחלפים.

נחשב כעת את הביטויים המערבים את P, Q. ראשית,

$$\begin{aligned}P^2 &= B_0^2 + B_0 B_1 + B_1 B_0 + B_1^2, \\ Q^2 &= B_0^2 - B_0 B_1 - B_1 B_0 + B_1^2.\end{aligned}$$

בחיבור, האיברים המעורבים מתבטלים. מכיוון ש־ $B_0^2 = B_1^2 = I$, מתקבל

$$P^2 + Q^2 = 2B_0^2 + 2B_1^2 = 4I.$$

בדומה, תוך שמירה על סדר הגורמים,

$$\begin{aligned}PQ &= (B_0 + B_1)(B_0 - B_1) \\ &= B_0^2 - B_0 B_1 + B_1 B_0 - B_1^2 \\ &= -B_0 B_1 + B_1 B_0 \\ &= -[B_0, B_1],\end{aligned}$$

ובאופן דומה

$$QP = [B_0, B_1].$$

נציב את שלוש הזהויות בפיתוח של C^2:

$$\begin{aligned}C^2 &= 4I \otimes I - A_0 A_1 \otimes [B_0, B_1] + A_1 A_0 \otimes [B_0, B_1] \\ &= 4I \otimes I - (A_0 A_1 - A_1 A_0) \otimes [B_0, B_1] \\ &= 4I \otimes I - [A_0, A_1] \otimes [B_0, B_1].\end{aligned}$$

זוהי הזהות המבוקשת, כאשר מזהים את $I \otimes I$ עם אופרטור הזהות על המערכת המשותפת. □

האופרטור C הרמיטי, ולכן

$$\begin{aligned}\|C\|^2 &= \|C^2\| \\ &\leq 4 + \|[A_0, A_1]\| \, \|[B_0, B_1]\|.\end{aligned}$$

כל אחד מהאופרטורים A_x, B_y אוניטרי, ולכן גם המכפלות $A_0A_1, A_1A_0, B_0B_1, B_1B_0$ אוניטריות ובעלות נורמה 1. מכאן

$$\|[A_0, A_1]\| = \|A_0A_1 - A_1A_0\| \leq \|A_0A_1\| + \|A_1A_0\| = 2.$$

באותו אופן, $\|[B_0, B_1]\| \leq 2$, ולכן

$$\|C\|^2 \leq 4 + 2 \cdot 2 = 8.$$

לבסוף, לכל מצב מנורמל $|\psi\rangle$ נקבל

$$|S| = \left|\langle\psi| \, C \, |\psi\rangle\right| \leq \|C\| \leq 2\sqrt{2}.$$

זהו חסם צירלסון, וממנו נובע החסם הרצוי על הסתברות הניצחון.

ההוכחה אינה מניחה דבר על ממדי המרחבים המקומיים. הצגנו אותה עבור מצב טהור ומדידות פרויקטיביות, בהתאם למסגרת שלמדנו עד כה.

למתעניינים, נציין שהחסם נשמר גם עבור מצבים מעורבים ומדידות כלליות יותר. אלה מושגים שטרם למדנו, ונכיר אותם בקורס אינפורמציה קוונטית בסמסטר הבא; ההערה הבאה אינה דרושה להבנת ההוכחה. מצב מעורב הוא צירוף קמור של מצבים טהורים, ולכן החסם נשמר גם עבורו, מליניאריות הסתברות הניצחון. גם מדידות כלליות יותר אינן משפרות את החסם: אפשר לממש אותן באמצעות מערכת עזר מקומית ומדידה פרויקטיבית במרחב גדול יותר, שעליו ההוכחה שלנו עדיין חלה.

תרגיל 4.1. חשבו את האופרטור C עבור האסטרטגיה שהצגנו והראו כי

$$C = \sqrt{2}\,(X \otimes X + Z \otimes Z).$$

הראו שהנורמה שלו היא בדיוק $2\sqrt{2}$, ושהמצב המשותף של השחקנים משיג את החסם:

$$\langle\Phi^+| \, C \, |\Phi^+\rangle = 2\sqrt{2}.$$

5 קצת פילוסופיה לסיום

כעת אפשר לחזור לשאלה שהניעה את הדיון ההיסטורי. ראינו שתורת הקוונטים מאפשרת קורלציות שאי אפשר לקבל באמצעות אסטרטגיות מקומיות עם אקראיות משותפת. כדי להבין את המשמעות הפיזיקלית של התוצאה, כדאי לנסח במפורש מהו המודל ששללנו.

נניח שיש משתנה חבוי משותף λ, המתאר מידע שמקורו בעבר המשותף של שתי המערכות. אין הגבלה על כמות המידע הזו. התגובה של אליס יכולה להיות תלויה בקלט שלה ובמשתנה החבוי, וכך גם התגובה של בוב. הנחת המקומיות במודל היא שבהתניה במשתנה החבוי, התפלגות התשובות מתפרקת למכפלה:

$$\Pr[a, b \mid x, y, \lambda] = \Pr[a \mid x, \lambda] \Pr[b \mid y, \lambda].$$

בנוסף, מניחים שבחירות הקלטים אינן מתואמות עם המשתנה החבוי:

$$\rho(\lambda \mid x, y) = \rho(\lambda).$$

מכאן מתקבל

$$\Pr[a, b \mid x, y] = \int \Pr[a \mid x, \lambda] \Pr[b \mid y, \lambda] \rho(\lambda) \, d\lambda.$$

זהו בדיוק המודל של אסטרטגיות מקומיות עם אקראיות משותפת. לכן הסתברות הניצחון שלו במשחק אינה יכולה לעלות על $3/4$. שימו לב שלא דרשנו שהתשובות יהיו דטרמיניסטיות: המודל מאפשר גם אקראיות מקומית אצל כל שחקן. כבר ראינו שגם היא אינה עוזרת לעבור את החסם.

האסטרטגיה הקוונטית עוברת את החסם הזה. לכן אי אפשר להסביר את הקורלציות שלה באמצעות שום מודל המקיים יחד את ההנחות שכתבנו. בפרט, הוספת מידע נסתר, רב ככל שיהיה, אינה מספיקה כדי להשלים את התיאור הקוונטי באופן מקומי תוך שמירה על אי־התלות של בחירות המדידה.

זו גם הנקודה שבה התוצאה של בל מוסיפה על טיעון EPR. האפשרות להשלים את התיאור באמצעות תכונות נוספות כפופה בעצמה למגבלות מתמטיות. הניסויים מאפשרים לבדוק את המגבלות האלה, והתוצאות תומכות בהפרות שמנבאת תורת הקוונטים. המסקנה מתייחסת לצירוף ההנחות של המודל; היא אינה שוללת כל תיאוריה של משתנים חבויים, ואינה מכריעה לבדה מהי הפרשנות הנכונה של תורת הקוונטים.

לבסוף, חשוב להבחין בין המקומיות שהגדרנו לבין עקרון **אי־האיתות**, no-signalling. עיקרון זה אומר שהתפלגות התוצאה המקומית של אליס אינה תלויה בבחירת המדידה של בוב, ולהפך. למשל,

$$\sum_b \Pr[a, b \mid x, y] = \sum_b \Pr[a, b \mid x, y'] \qquad \forall a, x, y, y'.$$

כל מודל מקומי מהצורה שכתבנו מקיים את העיקרון הזה, אבל הכיוון ההפוך אינו נכון: הקורלציות הקוונטיות מקיימות אי־איתות גם כשהן מפרות אי־שוויון בל.

לכן אליס אינה יכולה להשתמש בבחירת המדידה שלה כדי לשלוח לבוב הודעה מיידית. במשחק שלנו, למשל, התוצאה המקומית של כל אחד מהמשחקנים היא ביט אחיד, בכל אחת מבחירות הקלטים. ההפרה מתגלה בקורלציות בין התוצאות, וכדי לאמוד אותן עליהם להשוות את הנתונים באמצעות תקשורת רגילה.