

היכרות ראשונה עם קיוביטים

1 הקיוביט

ביט (bit) הוא יחידת המידע הבסיסית בחישוב: אובייקט מתמטי שערכו אחד משני הערכים 0 או 1. ניתן להפעיל פעולות לוגיות על ביט או על כמה ביטים יחד. ברוב ההקשרים במדעי המחשב מתייחסים לביט כאל אובייקט מתמטי מופשט; שאלת המימוש הפיזי שלו נדונה לכל היותר בקורסי מבוא כגון "תכן לוגי". כל עוד אנו פועלים ברמת ההפשטה של אלגוריתמים ומבני-נתונים אין צורך להתייחס למימוש הפיזי.

בהקשר של חישוב קוונטי, המקבילה לביט היא הקיוביט (qubit). גם כאן נתייחס אל הקיוביט כאל אובייקט מתמטי מופשט, אך ברור כי בהקשר הקוונטי—אף יותר מן ההקשר הקלאסי—שאלת המימוש הפיזי של קיוביט מרתקת במיוחד. אף שלא נעמיק בקורס זה במגוון המימושים הפיזיקליים האפשריים של קיוביט, חשוב להדגיש כי קיוביטים אכן קיימים, במובן שאפשר לממש במעבדה את אותו אובייקט מתמטי שעליו נלמד. זה אולי נשמע מובן מאליו, אך כדאי לזכור זאת: משנתחיל להכיר את האובייקט הזה, נראה שהוא מוזר למדי—עד שקל להעלות ספק בקיומו.

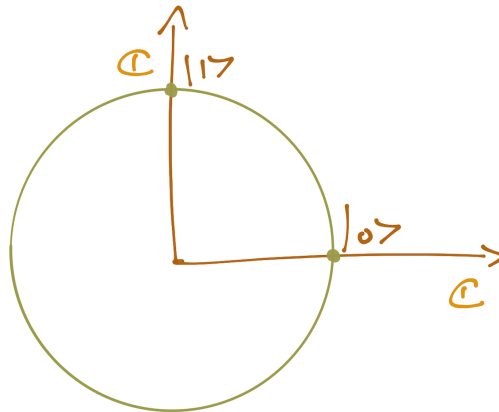
לביט יש אחד משני מצבים: 0 או 1. באופן דומה, קיוביט יכול להימצא באחד משני מצבי בסיס שנסמנם ב $|0\rangle$ ו- $|1\rangle$. נשוב בהמשך לסימון זה, שהגה דיראק; לעת עתה נתייחס אליו כסימון בלבד.

1.1 עיקרון הסופרפוזיציה

אחד מעקרונות היסוד של תורת הקוונטים קובע: אם חלקיק יכול להימצא במצב אחד או במצב אחר, הוא יכול להימצא גם ב"סופרפוזיציה" שלהם. לענייננו—כאשר אנו מדברים על קיוביטים—פירוש הדבר שקיוביט יכול להיות במצב $|0\rangle$ או $|1\rangle$, ואף בכל צירוף ליניארי שלהם:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

כאשר α ו- β הם מספרים מרוכבים המקיימים $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. כלומר, קיוביט הוא וקטור מנורמל (מאורך 1) במרחב דו-ממדי מעל שדה המספרים המרוכבים, $\mathbb{C}$.



המצבים $|0\rangle$ ו- $|1\rangle$ מהווים בסיס אורתונורמלי ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית הנקרא **הבסיס החישובי**. אין לבסיס החישובי עדיפות מהותית על פני כל בסיס אורתונורמלי אחר; מבחינה פיזיקלית כל הבסיסים שקולים. מן ההיבט ההנדסי, הבחירה בבסיס נקבעת על-פי אופן המימוש הפיזי של הקיוביט. אפשר כמובן לבטא את המצב בצורה היותר סטנדרטית מאלגברה לינארית

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

כאשר אנחנו מזהים את $|0\rangle$ ו- $|1\rangle$ עם איברי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{C}^2$, אך אנחנו נשתמש כמובן בסימון הנהוג בהקשר של חישוב קוונטי. באופן כללי הסימון $|\cdot\rangle$ מציין שמה שנמצא בין הסוגריים הלא סימטריים הוא וקטור עמודה.

כל כך הרבה מידע בקיוביט?

המודל המתמטי של קיוביט עלול להישמע בלתי-סביר: לכאורה אפשר לקודד בקיוביט יחיד עוצמת רצף של מידע. זה נדמה גם לא-פיזיקלי וגם לא-חישובי: איך אפשר לצפות מן הטבע "לשאת" כל-כך הרבה מידע בחלקיק בודד, ולעבד אותו? במקום לספק פתרון לחידה הזו (שלאיש אין לה תשובה משכנעת), תורת הקוונטים מציבה חידה נוספת—מטרידה לא פחות. וכיאה לקוונטים, שתיהן יחד אינן מתלכדות להסבר; הן יוצרות התאבכות הורסת בתור הסבר.

2 מדידה

בפיזיקה הקלאסית מונחת כמעט כמובנת מאליה ההנחה ש"מה שקיים---ניתן למדידה". הנחה זו מצויה בלב השיטה המדעית: אם אי-אפשר למדוד תופעה ולבחון אותה ניסויית, אין דרך ממשית לברר האם תחזית תאורטית תואמת את הטבע. לעומת זאת, כפי שנראה, מכניקת הקוונטים מצביעה על פער בין אבולוציה "שקטה" של מצב החלקיק--כאשר מניחים לו להתפתח לפי חוקי הטבע---לבין המידע שאפשר לחלץ ממנו כשמחליטים למדוד תכונה כלשהי

שלו. זהו היבט מטריד של התיאוריה, ולו טרם נמצא הסבר משכנע ומוסכם.

הפרשנות המקובלת מכונה **פרשנות קופנהגן**, ולבקירוב היא גורסת שאין משמעות לשאלה "מה היה מצב החלקיק לפני המדידה". שמה ניתן על שם מכון נילס בוהר בקופנהגן—מוקד עולמי לפיזיקה אטומית בשנות ה-20-30 של המאה ה-20—שבו התגבשו, סביב בוהר (Bohr) והייזנברג (Heisenberg) הרעיונות הפרשניים הללו. בפועל, רוב הפיזיקאים אינם נלהבים להתפלפל בין פרשנויות ומתייחסים למכניקת הקוונטים בראש ובראשונה כתיאוריה פיזיקלית חיזוית: מטרתה לנבא במדויק תוצאות ניסוי. מבקרים רואים בכך בריחה מן השאלות המהותיות ומציעים חלופות; הידועה שבהן היא **פרשנות ריבוי העולמות** של יו אוורט (Everett), שלפיה אין קריסה במדידה: המצב הכולל מתפתח יחידותית והיקום "מסתעף" לענפים שבכל אחד מהם מתקבלת תוצאה מסוימת. דיוויד דויטש (Deutsch)—מאבות החישוב הקוונטי—אף אוהב לתאר חישוב קוונטי כסוג של "ביזור" על פני ענפים או עולמות מקבילים. בקורס זה נאמץ את הקו הפנהגני ונשאיר את הדיון הפילוסופי ברקע.

2.1 מדידה של קיוביט בבסיס החישובי

בהקשר שלנו, של קיוביטים, מכניקת הקוונטים קובעת שיש מכשיר מדידה שמקבל קיוביט ופולט אחד משני ערכים 0 או 1. אם מצב הקיוביט הוא

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,$$

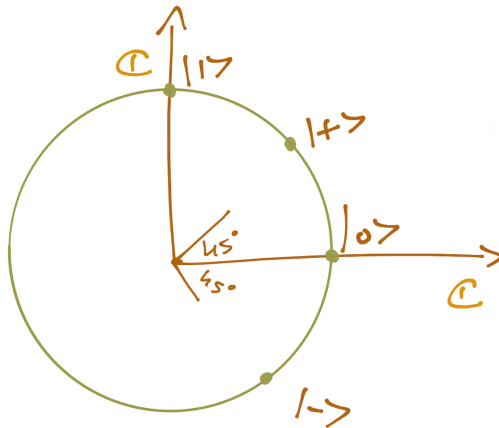
אז לפי כלל בורן ההסתברות שהמכשיר יפלוט 0 היא $|\alpha|^2$, וההסתברות שיפלוט 1 היא $|\beta|^2$. בנוסף, מיד אחרי המדידה המצב של הקיוביט משתנה (או קורס) ל- $|0\rangle$ או ל- $|1\rangle$ בהתאמה. המספרים α ו- β נקראים **אמפליטודות (amplitudes)** ומהן כאמור ניתן לגזור את ההסתברות למדידה של המצב.

כך למשל, מדידה של המצב הבא תניב 0 או 1 בהסתברות שווה

$$|+\rangle \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle.$$

נשים לב שאותו כנ"ל תקף גם לגבי המצב

$$|-\rangle \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$



על אף שמדובר במצבים שונים, מכשיר המדידה שהגדרנו—כלומר מדידה בבסיס החישובי—אינו מבחין בין המצבים $|+\rangle$ ו- $|-\rangle$. עם זאת, ניתן למדוד קיוביט בכל בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^2$. לבסיס החישובי אין עדיפות מהותית; במעבדה יודעים לממש גם מכשירי מדידה המתאימים לכל בסיס כזה. המצבים $|+\rangle$ ו- $|-\rangle$ שהגדרנו הם בסיס אורתונורמלי נוסף ושימושי, שנפגוש בו רבות במהלך הקורס—בעיקר בזכות קשרו ההדוק לבסיס החישובי $|0\rangle, |1\rangle$.

2.2 מדידה בבסיס אורתונורמלי כללי

הדרך שבה מתבצעת מדידה קוונטית ביחס לבסיס אורתונורמלי $\{|u\rangle, |v\rangle\}$ היא כך: בהינתן מצב $|\psi\rangle$, נקבל u בהסתברות

$$||u\rangle^\dagger |\psi\rangle|^2$$

ואת v בהסתברות $||v\rangle^\dagger |\psi\rangle|^2$ כאשר נשים לב כי, מהאורתונורמליות סכום מספרים אלו הוא אכן 1. מיד לאחר המדידה, המצב $|\psi\rangle$ קורס ל- $|u\rangle$ או ל- $|v\rangle$ בהתאם לתוצאה.

במילים אחרות, כדי להבין מדידה בבסיס $\{|u\rangle, |v\rangle\}$ נרשום את המצב הנמדד $|\psi\rangle$ ביחס לבסיס זה:

$$|\psi\rangle = \alpha |u\rangle + \beta |v\rangle.$$

אזי ההסתברות לקבל את התוצאה u היא $|\alpha|^2$, וההסתברות לקבל את התוצאה v היא $|\beta|^2$. לאחר המדידה המצב קורס ל- $|u\rangle$ או ל- $|v\rangle$ בהתאם לתוצאה.

2.3 נוטציית דיראק

קל לראות שהסימון עלול לבלבל. בסימון דיראק, לכל $|\psi\rangle$ ket מותאם ה-bra $\langle\psi|$. פורמלית

$$\langle\psi| \triangleq (|\psi\rangle)^\dagger.$$

כלומר,

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \implies \langle\psi| = (\alpha^* \ \beta^*).$$

עם סימון זה, ההסתברות לקבל את u ניתן לכתיבה כ

$$|\langle u|\psi\rangle|^2$$

מה שנחמד בנוצציית דיראק זה שאת שני הקווים האנכיים אנו ממזגים לקו אחד. כלומר, את המכפלה הפנימית של $|u\rangle$ עם $|\psi\rangle$ מסמנים $\langle u|\psi\rangle$. עם המוסכמה הזו, הסיכוי לקבל את u נכתוב כ-

$$|\langle u|\psi\rangle|^2.$$

2.4 דוגמה

נמדוד את $|0\rangle$ בבסיס $\{|+\rangle, |-\rangle\}$. מאחר ש

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle),$$

נקבל את הפירוק

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle).$$

מכאן ההסתברויות:

$$\text{Pr}[+] = |\langle +|0\rangle|^2 = \frac{1}{2}, \quad \text{Pr}[-] = |\langle -|0\rangle|^2 = \frac{1}{2}.$$

מיד לאחר המדידה המצב קורס ל- $|+\rangle$ או ל- $|-\rangle$ בהתאם לתוצאה.

הערה לגבי נוטיצה ונרמול. כבר כאן ראוי להעיר שגורמי הנרמול לעיתים מסרבלים את הכתיבה, ולכן נתיר לעצמנו להשמיטם כאשר הכוונה ברורה. למשל נכתוב $|+\rangle = |0\rangle + |1\rangle$ בהבנה שהנרמול נעשה מאליה.

3 איך נראים קיוביטים במעבדה – טעימה קלה

איננו מעמיקים כאן במימוש הפיזיקלי של קיוביט יחיד, אך נזכיר בקצרה דוגמאות כדי לקבל תחושה:

- אור (פוטונים): לאור יש "כיוון רעידה" שנקרא קיטוב. בוחרים שתי אפשרויות בסיס—נאמר אופקי מול אנכי—ומזהים אותן עם $|0\rangle$ ו- $|1\rangle$. בעזרת רכיבים אופטיים פשוטים אפשר להכין גם שילובים (סופרפוזיציות) ביניהם, ולמדוד בעזרת מתקן שמפריד אופקי לצד אחד ואנכי לצד אחר.

- **אלקטרון (ספין):** לאלקטרון יש תכונה קוונטית שנקראת ספין, עם שתי אפשרויות—"למעלה" או "למטה" ביחס למגנט. מעניין לציין שאין מדובר בסיבוב במובן של הפיזיקה הקלאסית אלא בתופעה פיזיקלית חדשה. השם ניתן לה מפני שהתיאור המתמטי שלה דומה לזה של תנע זוויתי. בעזרת שדות/פולסים עדינים שמים אותו בשילוב של שתי האפשרויות, וכשמחליטים למדוד מקבלים אחת משתייהן.

- **אטום (רמות אנרגיה):** לאטום יש מצב "קרקע" ומצב "מעורר". מזהים אותם עם $|0\rangle$ ו- $|1\rangle$. פולס אור קצר מעביר בין המצבים; "חצי פולס" יוצר מצב שהוא גם קרקע וגם מעורר בריזומנית, $|+\rangle$. למדידה בודקים, למשל, האם האטום פולט אור—וכך יודעים באיזה מצב הוא.

השורה התחתונה: בכל הדוגמאות בחרים שתי אפשרויות בסיס, יודעים להכין מהן שילוב (סופרפוזיציה), ולבסוף מודדים ומקבלים אחת משתי התוצאות. וזה לא רק תאוריה—כך בדיוק עובדים בפועל במעבדות.

4 הסבר קוונטי לניסויים מהיחידה הקודמת

כבר בשלב זה אנו יכולים להסביר את סדרת הניסויים ואת התוצאות המפתיעות מן היחידה הקודמת, ואתם תזכו לחקור זאת יותר לעומק בשיעורי הבית. נשתמש במודל של קיוביט, ובהנחה של מימוש פיזיקלי אפשרי כבר עמדנו קודם. נזהה את תכונת הצבע כך ש"שחור" תואם ל- $|0\rangle$ ו"לבן" ל- $|1\rangle$; בהתאם, מרגע שנמדד הצבע—כל מדידה נוספת של צבע תהיה עקבית עם התוצאה הראשונה. באופן דומה נזהה את תכונת הקושי כך ש"רך" תואם ל- $|-\rangle$ ו"קשה" ל- $|+\rangle$.

נקודה חשובה. לקופסאות בניסוי—מדיהצבע ומדיהקושי—יש שם טיפה בעייתי שכן הן אינן מבצעות מדידה קוונטית כשלעצמן; הן רק ממפות את התכונה הנמדדת למיקום/מסלול. אלקטרון "לבן" יופיע ביציאה אחת של מדיהצבע ו"שחור" בשנייה. כלומר, לא מתבצעת קריסה קוונטית למצב הנמדד. ניסויי הבסיס מתיישבים עתה עם מודל הקיוביט:

ניסוי מספר 1

אלקטרון אקראי הנכנס למערך יופרד במדיהצבע לשתי יציאות; אם אכן בוחנים איזו יציאה הופעלה (או בחרים את היציאה המתאימה), הפעולה שקולה למדידה בבסיס $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ והיציאות מופיעות בקירוב ב-50%-50%. נניח שנבחרה יציאת "שחור"; כעת מצב האלקטרון הוא $|0\rangle$. מדיהקושי הבא—כשפלטו מחובר לקלט הקופסה הבאה—מבצע מדידה בבסיס $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, ולכן בהסתברות $1/2$ האלקטרון יימצא "קשה" $|+\rangle$ ויזין את הקופסה השלישית. הקופסה השלישית, יחד עם המדידה הסופית, תניב $|0\rangle$ או $|1\rangle$ (שחור או לבן) בהסתברות שווה.

ניסוי מספר 2

לניסוי 2 נכנס אלקטרון לבן, כלומר קיוביט במצב

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle).$$

האלקטרון "הלבן" ($|1\rangle$) עובר דרך קופסת מדידה קושי, אך הקופסה אינה מודדת במובן הקוונטי—שכן שני הפלטים מוזנים הלאה. אינטואיציה קלאסית גורמת לנו "להתנות בראש" שהאלקטרון עבר או בנתיב הרך או בקשה, אבל פיזיקלית אין כאן בחירה כזו ולכן אין קריסה. מבחינה מתמטית, מכיוון ש $|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$ אילו נמדד הקושי בשלב זה, התוצאות היו 50%–50% בין $|+\rangle$ ל- $|-\rangle$. אולם מאחר שאין כאן מדידה בפועל, הקוהרנטיות נשמרת והמעריך ממשיך בהתאם. כלומר, מכאן האלקטרון הלבן ($|1\rangle$) עובר כמו שהוא למד הקושי, אשר מודד אותו לפי הבסיס $|+\rangle, |-\rangle$ ולכן התוצאה היא 50 אחוז לכל קושי.

ניסויים 3 ו-4

ניסוי 3 מוסבר באותה רוח, ולכן נדלג עליו כאן. נעבור לניסוי המעניין יותר—ניסוי 4—שעכשיו מתבהר בקלות: לפי הניתוח של ניסוי מספר 2, האלקטרון ה"לבן" הנכנס למעריך אינו נמדד במדידה קושי; ולכן מדידה הצבע שאחריו פולט "לבן" בהסתברות 1.

אז היכן האלקטרון?

לגבי השאלה "היכן האלקטרון נמצא—במסלול הרך או הקשה?": בניסוח שלנו זו אותה שאלה כמו "האם האלקטרון רך או קשה". לפי מכניקת הקוונטים אלקטרון יכול להיות בסופרפוזיציה של רך וקשה. בפרט, אלקטרון לבן מקיים (עד כדי נרמול) $|1\rangle = |+\rangle - |-\rangle$ לכן, כל עוד לא נמדד הקושי, האלקטרון "נמצא" במובן מסוים בשני המצבים גם יחד.

מקור השם סופרפוזיציה

בדרך שבה פיזיקאים לומדים את תורת הקוונטים, קיוביטים מופיעים לרוב רק בסוף קורס המבוא (אם בכלל); התכונה המרכזית עבור אלקטרון היא למשל המיקום—שהוא גודל רציף. בהקשר זה "סופרפוזיציה" פירושה שהאלקטרון אינו חייב להיות במקום מוגדר טרם המדידה: מצבו התלוי-מקום מתואר על-ידי פונקציית גל. בעת שמודדים מיקום, פונקציית הגל קורסת לערך נקודתי שבו האלקטרון נצפה.

מתמטית, מדובר באובייקט עשיר יותר: במקום מרחב דו-ממדי (כמו בקיוביט) עובדים במרחב הילברט אינסופי-ממדים, שהוא מרחב מכפלה-פנימית ללא "חורים". לדיוק פורמלי דרוש גם רקע בסיסי בתורת המידה, שלב שרבים מדלגים עליו בקורסי מבוא. על כן, הבנוס שלנו כמדעני מחשב שבאים ללמוד חישוב קוונטי הוא שאנחנו נחשפים לכל התוכן המעניין של מכניקה קוונטית מבלי לשלם את המס המתמטי הזה (אם כי באופן אישי, אני אוהב את המתמטיקה

הזו, ובכלל).

5 הכללה של מושג הקיוביט

כמו שאפשר להכליל ביט ליחידת מידע מרובת-ערכים, כך בקוונטים מכלילים קיוביט למערכת בעלת d רמות (qudit). המקרה $d = 3$ נקרא qutrit: מרחב הילברט תלת-ממדי מעל $\mathbb{C}$ עם בסיס חישובי $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$. מצב כללי נכתב

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle + \gamma |2\rangle, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1.$$

במדידה בבסיס החישובי: $\Pr[0] = |\alpha|^2, \Pr[1] = |\beta|^2, \Pr[2] = |\gamma|^2$, ולאחר המדידה המצב קורס ל- $|0\rangle, |1\rangle$ או $|2\rangle$ בהתאם.

כמו בעולם הקלאסי, נעדיף לעבוד עם ביטים ולהרכיב מהם מצבים מרובים. למשל, במקום להמציא סימונים לארבעה מצבים $(0,1,2,3)$, נייצג אותם בעזרת שני ביטים: $00, 01, 10, 11$.

בהקבלה הקוונטית נשתמש בשני קיוביטים. הבסיס החישובי הוא $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$, ומצב כללי נכתב

$$|\psi\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle, \quad |\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 1.$$

במדידה בבסיס החישובי נקבל $00, 01, 10, 11$ בהסתברויות $|\alpha_{00}|^2, |\alpha_{01}|^2, |\alpha_{10}|^2, |\alpha_{11}|^2$, ולאחר המדידה המצב קורס לאיבר הבסיס שנצפה.

6 פעולות על קיוביטים

עם ביט קלאסי אין הרבה מה לעשות: מעבר לאתחולו לערך נתון או להשארתו כפי שהוא, הפעולה היחידה על ביט יחיד שבאמת מעניינת היא היפוך - שער NOT. בעולם הקוונטי, אפילו קיוביט אחד עשיר בהחלט. אנחנו נתחיל את הדיון מהאנלוג הקוונטי של NOT—שער פאולי X —המממש

$$X |0\rangle = |1\rangle, \quad X |1\rangle = |0\rangle.$$

אחת מהנחות היסוד של מכניקת הקוונטים היא שכל טרנספורמציה פיזיקלית מותרת היא לינארית; לכן, ברגע שמגדירים פעולה על בסיס חישובי, היא נקבעת באופן יחיד על כל סופרפוזיציה: לכל מצב $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ מתקיים

$$X |\psi\rangle = \alpha |1\rangle + \beta |0\rangle.$$

בכתיב מטריציוני (בבסיס $\{|0\rangle, |1\rangle\}$) מתקיים

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.1 מתי טרנספורמציה לינארית היא פיזיקלית?

נבחין שלא כל טרנספורמציה לינארית היא פעולה פיזיקלית. כדי שפעולה על קיוביט תהיה פיזיקלית: וקטור יחידה (קיוביט) נשלח לוקטור יחידה. על כן, באופן כללי יותר הטרנספורמציה חייבת לשמר נורמה. כלומר, אם U היא הטרנספורמציה אז לכל מצב $|\psi\rangle$ מתקיים

$$\|U|\psi\rangle\| = \|\psi\rangle\|$$

אם נעלה בריבוע את שני האגפים נקבל את התנאי השקול

$$\forall |\psi\rangle \quad \langle\psi| U^\dagger U |\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$$

טרנספורמציה U המקיימת תנאי זה היא בהכרח יונטרית, כלומר

$$U^\dagger U = U U^\dagger = I$$

או באופן שקול

$$U^\dagger = U^{-1}$$

נזכיר תנאי שקול נוסף: מטריצה U היא יונטרית אם רק ואם העמודות שלה מהוות בסיס אורתונורמלי.

מסתבר שמעבר לכך אין תנאי נוסף מההיבט המתמטי על טרנספורמציות פיזיקליות.

6.1.1 ערכים עצמיים של מטריציות אוניטריות

נזכור כי כל ערך עצמי של טרנספורמציה אוניטרית שוכן על מעגל היחידה. אכן, יהי U אופרטור אוניטרי ו- $|\psi\rangle$ עובר $U|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$. אזי

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi| U^\dagger U |\psi\rangle = \langle\lambda\psi|\lambda\psi\rangle = |\lambda|^2 \langle\psi|\psi\rangle,$$

ומכיוון ש- $\langle\psi|\psi\rangle \neq 0$ נקבל $|\lambda| = 1$.

6.1.2 מטריצות נורמליות ולכסון אוניטרי

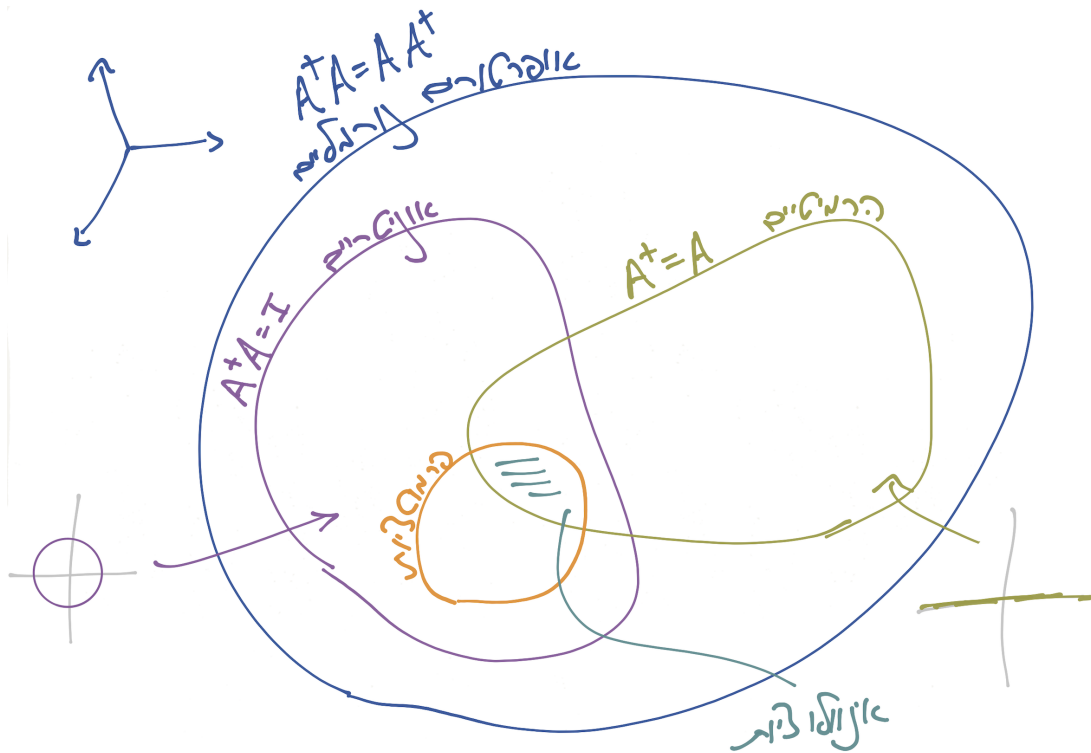
מטריצה אוניטרית היא מקרה פרטי של מטריצה נורמלית; מטריצה U נקראת נורמלית אם

$$U^\dagger U = U U^\dagger$$

תנאי שקול לנורמליות הוא קיומו של בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של U . באופן שקול, מטריצה היא נורמלית אם ורק אם היא ניתנת ללכסון אוניטרי; כלומר, קיימות מטריצה אוניטרית V ומטריצה אלכסונית D כך ש

$$U = V D V^\dagger \quad (1)$$

לפיכך, כל האמור נכון גם למטריצות אוניטריות. מה שמאפיין מטריצה אוניטרית לעומת נורמלית כללית הוא שכל הערכים העצמיים שלה נמצאים על מעגל היחידה; למעשה, מטריצה נורמלית היא אוניטרית אם ורק אם כל ערכיה העצמיים הם בעלי מודולוס 1. במקרה זה D היא אלכסונית שערכיה מהצורה $e^{i\theta}$ עבור $\theta \in \mathbb{R}$.



איור 1: משפחת המטריצות הנורמליות

6.2 בחזרה לשער פאולי X

נשוב לטרנספורמציה X שראינו קודם לכן, ונבחין כי

$$X|+\rangle = |+\rangle, \quad X|-\rangle = -|-\rangle$$

ולכן $|+\rangle$ ו- $|-\rangle$ הם וקטורים עצמיים של X עם ערכים עצמיים 1 ו-1 בהתאמה. הפירוק המתאים ל **משוואה (1)** מתקבל עבור

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

מעניין לציין שעל פי **משוואה (1)** לכל מטריצה אונטרית U קיים "שורש" - מטריצה שהריבוע שלה הוא המטריצה U . אכן, זו המטריצה

$$\sqrt{U} \triangleq V\sqrt{D}V^\dagger$$

כאשר המטריצה $\sqrt{D}$ מוגדרת על ידי לקיחת שורש של כל כניסה על האלכסון. כלומר, אם מופיע כאיבר כלשהו במטריצה D אז האיבר המתאים ב- $\sqrt{D}$ הוא $e^{i\alpha/2}$. בדוגמה שלנו, השורש של פעולת ה-NOT הוא

$$\sqrt{X} = V\sqrt{D}V^\dagger = V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} V^\dagger = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$$

6.3 שני אופרטורים חשובים

שני אופרטורים חשובים נוספים הם שער פאולי- Z , המוגדר באמצעות

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ואופרטור האדמרד

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

נחזור אליהם שוב ושוב במהלך הקורס. נשים לב שכבר נתקלנו באופרטורים הללו קודם לכן ב **משוואה (2)** כאשר פירקנו את האופרטור פאולי X . בפרט, ראינו כי

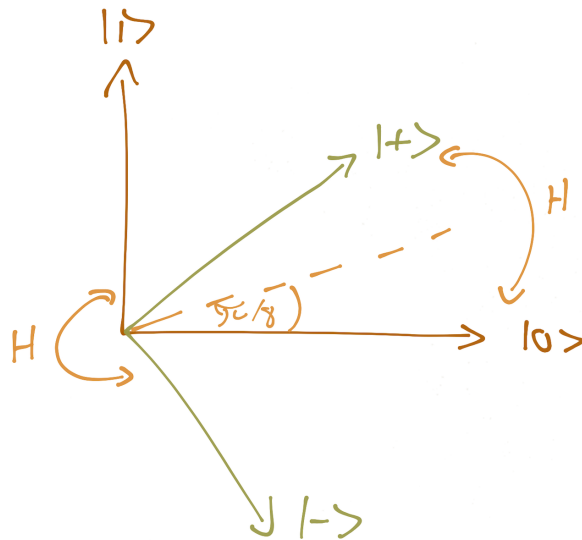
$$X = HZH$$

אחד השימושים החשובים באופרטור האדמרד הוא המרה בין הבסיס החישובי $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ לבסיס $\{|+\rangle, |-\rangle\}$. במסגרת חישוב קוונטי נקודת המוצא היא שקל להכין קיוביטים במצב $|0\rangle$ (למשל באמצעות קירור; במימושים

פיזיקליים שונים). לעיתים נרצה דווקא שהקיוביט יאותחל ל- $|+\rangle$; עושים זאת על-ידי אתחול בפועל ל- $|0\rangle$ ואז הפעלת H :

$$H|0\rangle = |+\rangle, \quad H|1\rangle = |-\rangle.$$

אינטואיטבית, אפשר לחשוב על מטריצה יונטרית כעל מטריצה המבצעת סיבובים ושיקופים, ובפרט מטריצות סיבוב הן אוניטריות. אכן, נבחין כי אופרטור האדמרד הוא מטריצת שיקוף סביב הישר שבזווית $\frac{\pi}{8} = 22.5^\circ$ מהציר $|0\rangle$.



איור 2: האדמרד כאופרטור שיקוף