

מבחן - מועד א

תאריך: 27/3/2024

סגל הקורס: פרופסור גיל כהן, יואב גל-צור, איתי כהן.

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- השימוש בחומר עזר או במחשבון אסור.
- את התשובות יש לרשום רק על טופס הבחינה. מחברת הבחינה משמשת כטייטה ולא תיבדק.
- יש לרשום מספר ת.ז. ומספר מחברת בראש כל אחד מהדפים בטופס.
- בטופס 9 עמודים, לא כולל עמוד זה, הכוללים 7 שאלות ו-2 עמודים עם מסגרת נוספת למקרה הצורך. שימו לב כי השאלה השביעית היא שאלת בונוס המיועדת לקבוצה 28 בלבד. ודאו שכלל העמודים ברשותכם.
- ערכה של כל אחת מ-6 השאלות, להוציא שאלת הבונוס, הוא 17 נקודות. ציון המבחן הסופי על כן יכול להגיע ל-102. ערכה של שאלת הבונוס הוא 5 נקודות, כך שסטודנטים מקבוצה 28 יכולים להגיע לציון של 107 נקודות. בכל מקרה, ציון המבחן הסופי יעוגל למטה, במקרה הצורך, ל-100.
- יש לרשום תשובה מנומקת עבור כל שאלה במסגרת המתאימה.
- יש לכתוב את כל התשובות במקום המוקצב ובכתב קריא. תשובות ובהן חריגות לא זניחות מהמקום המוקצב, או תשובות הכתובות בכתב קטן באופן קיצוני או לא ברור לא ייקראו ולא יקבלו ניקוד, או שיקבלו ניקוד חלקי בלבד. תשובות שדורשות מאמצים רבים להבנתן גם כן עלולות לגרום הורדת ציון.
- לכן, מומלץ בחום לפתור ראשית במחברת ואז לרשום פתרון מסודר במסגרת. כאמור, ישנן זוג מסגרות נוספות למקרה הצורך בסוף הטופס.
- ניתן לרשום "אינני יודע/ת" כתשובה לשאלה או סעיף שלה, פרט לשאלת הבונוס, ולקבל 20% מהניקוד. במקרה זה אין להוסיף שום הסבר ו/או לסמן את אחת האפשרויות.

בהצלחה!

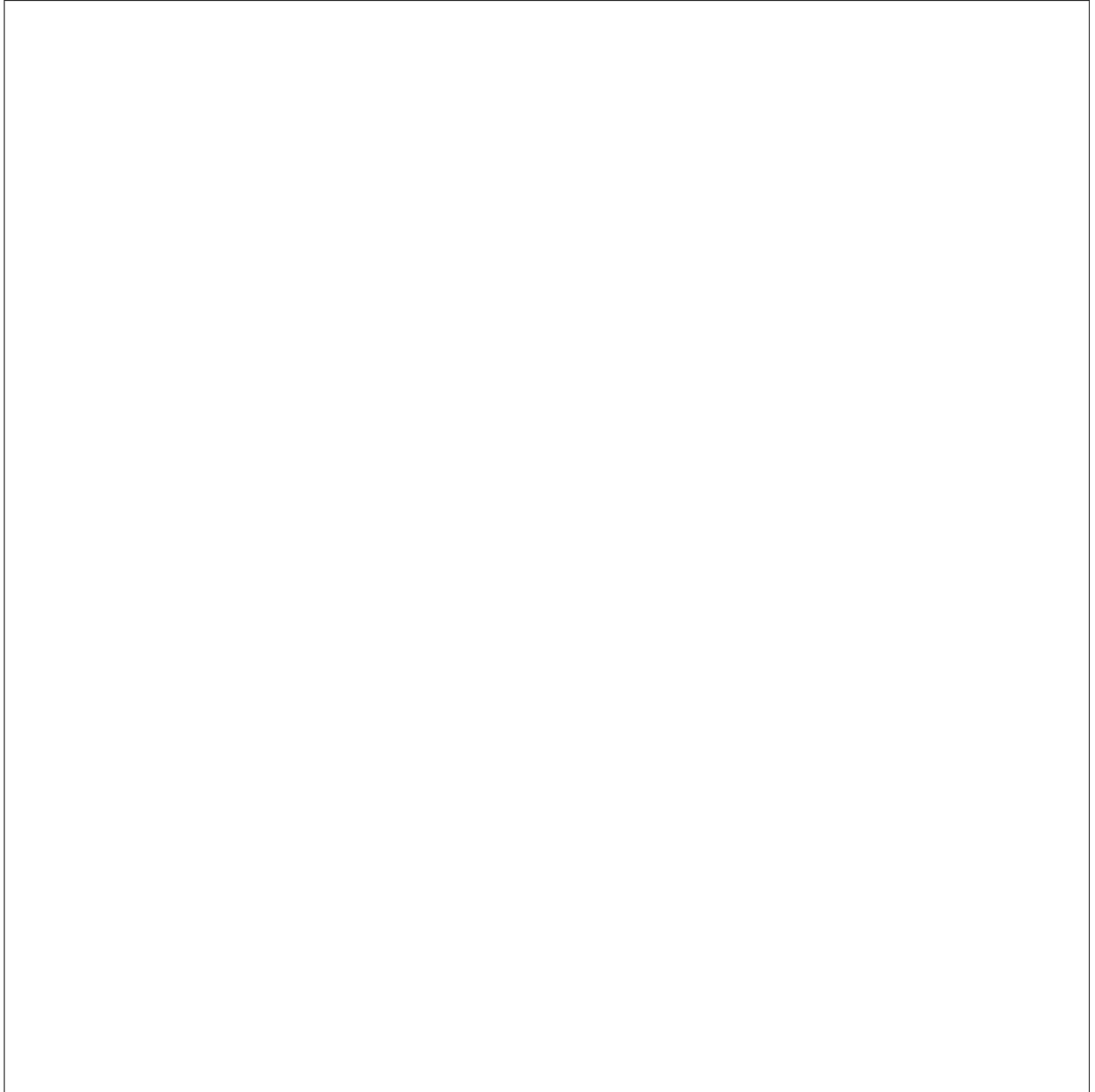
שאלה 1 (17 נקודות) יהיו $n > a > b > c$ מספרים טבעיים. כמה זוגות לא סדורים של תתי קבוצות $A, B \subseteq [n]$ ישנם כך ש- $|A| = a, |B| = b$ ו- $|A \cap B| = c$? יש לספק נימוק קצר לתשובתכם.

שאלה 2 (17 נקודות) מצאו את המקדם של $x^m y^{10}$ בביטוי

$$\left(x^2 + \frac{1}{x} + xy\right)^n$$

יש לספק נימוק קצר לתשובתכם.

שאלה 3 (17 נקודות) מפזרים 13 נקודות בתוך ריבוע שצלעותיו הן באורך 1. הוכיחו כי קיימות מתוכן ארבע נקודות הפורסות מרובע עם שטח שאינו עולה על 0.25. יש לספק נימוק קצר לתשובתכם.



שאלה 4 (17 נקודות) מקטע גנטי מאורך n הוא איבר בקבוצה $\{A, C, G, T\}^n$. מקטע גנטי יקרא "לא תקין" אם לפחות אחד מהבאים נכון עבורו:

1. אין בו את האות G .

2. האות T מופיעה 3 פעמים או יותר.

חשבו את מספר המקטעים התקינים מאורך n . תשובה עם סכימה תקבל ניקוד חלקי. יש לספק נימוק קצר לתשובתכם.

שאלה 5 (17 נקודות) חברת הנדל"ן והמשחקים המפורסמת "האנוי מגדלים" הוציאה משחק חדש. החוקים של המשחק זהים לחוקים של המשחק הקלאסי מגדלי האנוי, אלא שישנם ארבעה עמודים במקום שלושה. כלומר, ישנן n דיסקיות ב- n גדלים שונים. בכל קונפיגורציה חוקית, הדיסקיות מפוזרות בין ארבע המגדלים שממוספרים 1 עד 4, בצורה כזו שאף דיסקית לא יושבת מעל דיסקית שקטנה ממנה. בכל מהלך חוקי מותר לשחקן לבחור דיסקית שיושבת בראש אחד המגדלים ולהעביר אותה לראשו של מגדל אחר, כך שהקונפיגורציה החדשה נותרת חוקית. נגדיר את הגרף G להיות גרף הקונפיגורציות החוקיות של המשחק החדש. שתי קונפיגורציות הן שכנות אם יש מהלך חוקי במשחק שמעביר אותנו מהאחת לשנייה.

1. כמה קודקודים יש בגרף?

2. כמה קשתות?

יש לספק נימוק קצר לתשובתיכם.

שאלה 6 (17 נקודות)

יהא $n \geq 0$ מספר טבעי. צביעה של טבלה מגודל $3 \times n$ בשני צבעים - תכלת וורוד - תקרא "ואן-גוכית" אם אין שתי עמודות רצופות בטבלה כך שהעמודה השמאלית יותר כולה צבועה בתכלת והעמודה העוקבת צבועה בתכלת במשבצת האמצעית וברוד בשתי המשבצות הנותרות. באיור מודגמת צביעה לא חוקית. שימו לב: לשם הנוחות, המשבצות התכולות באיור מסומנות בכוכב.

				★		★			★
★	★		★	★	★			★	★
				★					★

1. נסמן ב- v_n את מספר הצביעות הוואן-גוכיות של טבלה עם n עמודות. מצאו נוסחת נסיגה עבור v_n . יש לספק נימוק קצר לתשובתכם.
2. פתרו את נוסחת הנסיגה.

מסגרת נוספת למקרה הצורך:

מסגרת נוספת שניה למקרה הצורך:

