Welcome to Algebraic-Geometric Codes!

Unit 0

Gil Cohen

February 20, 2022

Overview

1. What is this course about?
2. About us
3. Course mechanics
4. More on prerequisites
5. How do we proceed?
6. Goppa's paper

What is this course about?

This course is about a construction of certain error correcting codes known as Goppa Codes or Algebraic Geometric Codes.

These super beautiful and elegant codes beat the parameters of codes obtained via the probabilistic method (namely, the Gilbert-Varshamov bound) in interesting regime of parameters - an extremely rare phenomena.

But before we start, some technicalities.

About us

I am a theoretical computer scientist working mostly within

1. Complexity theory, especially randomness related questions
2. Explicit constructions
3. Coding theory
4. Spectral graph theory

Shir, your TA, is a PhD student advised by Amir Shpilka, working mostly within algebraic complexity.

Overview

1. What is this course about?
2. About us
3. Course mechanics
4. More on prerequisites
5. How do we proceed?
6. Goppa's paper

Course mechanics

Meetings

1. We meet physically on Mondays 9:10-12:00 at Shenkar-Physics 104.
2. Shir's recitations are on Tuesdays 15:10-16:00, same place.
3. I will be happy to meet, upon request, to discuss the material and problem sets.

Homepage & Contact

1. The course homepage: `www.gilcohen.org/2022-ag-codes`.
2. My email: `coheng@gmail.com`.
3. Shir's email: `shirpele@mail.tau.ac.il`.

Course mechanics

Grade

The grade will be determined by a 90 minute / two hour presentation to be given by each student at the end of the semester, covering topics that we will not cover in the lectures and recitations.

Problem sets

We will publish 5 or 6 problem sets during the semester. These are not to be submitted and will not affect the grade. Nonetheless, we strongly encourage you to complete them in detail. Upon request we will make time to discuss them.

Course mechanics

Literature
I will use slides which will be published before each lecture.

Everything you need, proofs included, will be in the slides though we will skip some proofs and you are expected to read and understand those we skipped (and those we didn't skip).

We will mostly follow

- Dan Haran's lecture notes for the first $\approx \frac{2}{3}$ of the course.
- Stichtenoth's book: Algebraic Function Fields and Codes.

There are several other books we will not directly follow. A truly marvellous such book is Lorenzini's An Invitation to Arithmetic Geometry.

Suggested materials is listed in the course homepage.

Course mechanics

Prerequisites

Despite the course's name, you do not need to know coding theory nor algebraic geometry. On the flip side, in the conclusion of the course, you will not know coding theory nor algebraic geometry.

This is mostly a course in pure mathematics, and is algebraic in nature. You are assumed to have a basic knowledge on groups, rings and fields. From mid-semester, Galois Theory will be used.

Request re slides

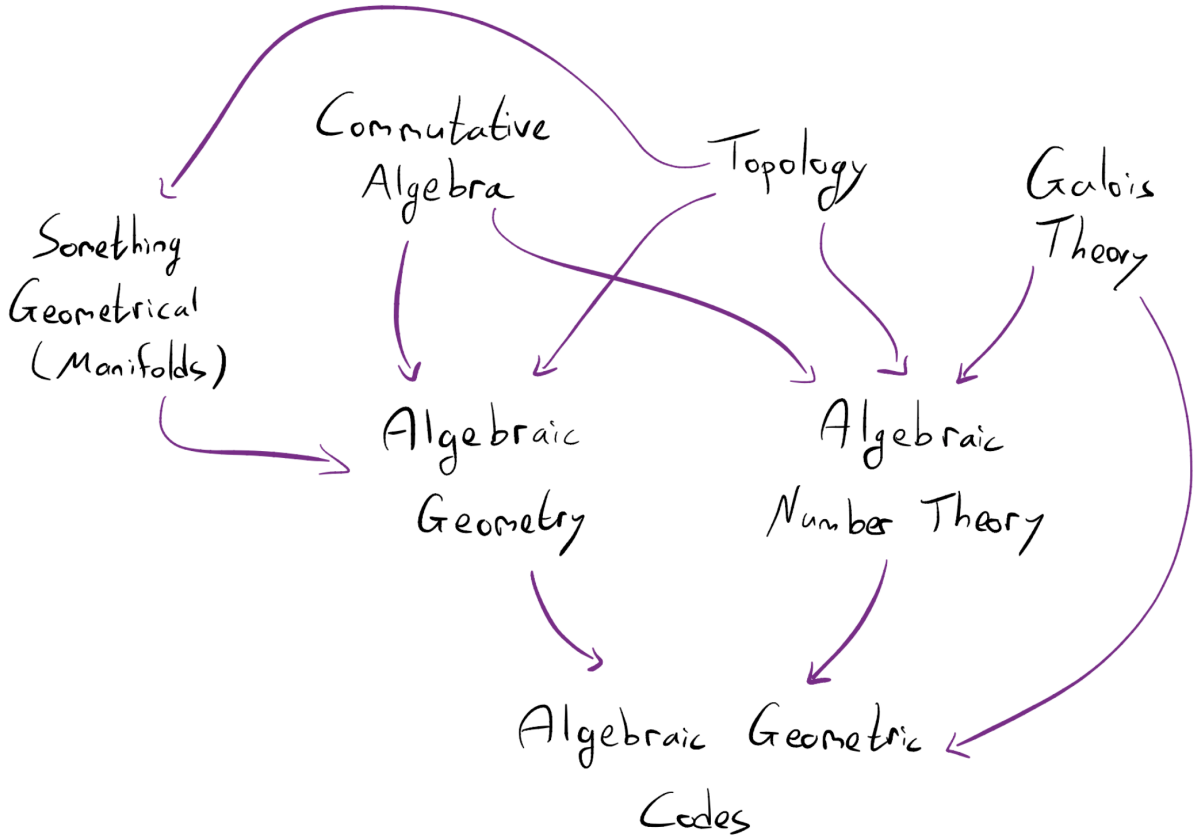
The slides are new. I will appreciate you emailing me about any typo you find.

Overview

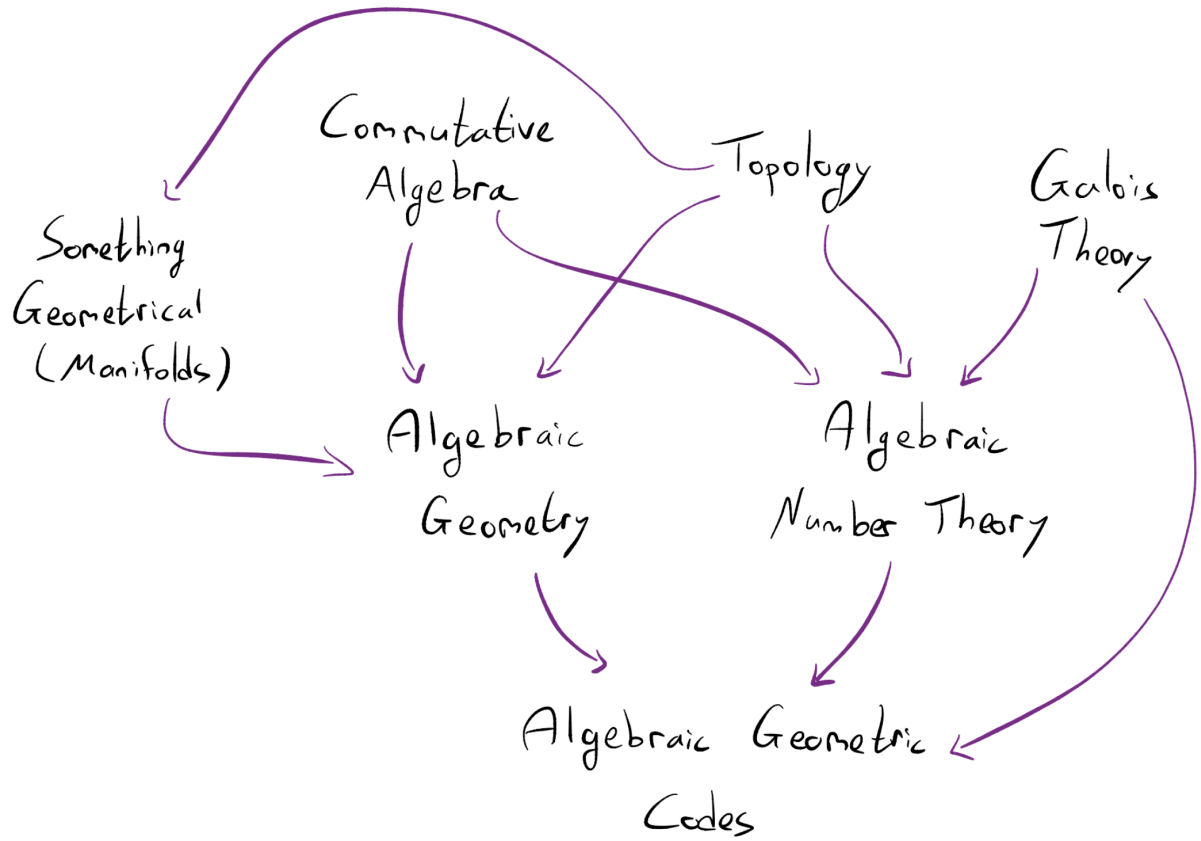
1. What is this course about?
2. About us
3. Course mechanics
4. More on prerequisites
5. How do we proceed?
6. Goppa's paper

More on prerequisites

Polynomials and alike are extremely useful in theoretical computer science (TCS), and the underlying mathematics of AG codes is far deeper and powerful than what is typically used in TCS. Thus, by some logic, this theory should find further applications. The problem is the steep learning curve for a typical TCS background.



More on prerequisites



The approach we take is algebraic. It is quicker and powerful but more abstract and lacks intuition. I will informally discuss the geometric (and number-theoretic) ideas and give hints to the broader context within commutative algebra.

Overview

1. What is this course about?
2. About us
3. Course mechanics
4. More on prerequisites
5. How do we proceed?
6. Goppa's paper

How do we proceed?

- A quick introduction to coding theory
- The basics of (algebraic) function fields (in one variable)
  - Abstracting the notion of a point on a curve
  - Function fields

    ⋮

  - Riemann's theorem (1857)
- Goppa codes

How do we proceed?

- The Riemann-Roch Theorem (1865)
- Function field extensions (here is were Galois theory will come in).
- Proof of The Riemann Hypothesis for curves over finite fields (raised by Artin (1924); proved by Hasse for genus 1 and Weil (1949) for the general case).

$$\vdots$$

- Construction of AG codes

[8] As to this, cf. H. Hasse, J. Reine Angew. Math. vol. 172 (1935) pp. 37–54. I regret that I did not quote either of these papers, where the connection between various kinds of exponential sums and the Riemann hypothesis is quite clearly expressed, in my recent note on the same subject, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. vol. 34 (1948) pp. 204–207.

Figure: A footnote from Weil's paper.

Overview

1. What is this course about?
2. About us
3. Course mechanics
4. More on prerequisites
5. How do we proceed?
6. Goppa's paper

Goppa's paper

Доклады Академии наук СССР
1981. Том 259, № 6

УДК 519.46 **МАТЕМАТИКА**

В.Д. ГОППА

КОДЫ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

(Представлено академиком А.А. Дородницыным 23 II 1981)

1. Конструкция кода. Пусть E^n – векторное пространство размерности n над конечным полем F_q, C – проективная кривая рода g над F_q, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ – различные точки кривой C, рациональные над F_q, $D = \Sigma P_i$, $G = \Sigma m_Q Q$ – два эффективных дивизора, причем G рационален над F_q, так что вместе с $m_Q Q$ содержит сопряженную точку $m_Q(\sigma Q)$, если Q принадлежит некоторому расширению поля F_q. Предполагается, что носители обоих дивизоров не пересекаются. Через $\Omega(G - D)$ обозначим как обычно пространство дифференциалов таких, что $(\omega) \geqslant G - D$. Введем линейный корректирующий код [1] посредством отображения

$$\Omega(G-D) \xrightarrow{\varphi} E^n,$$

$$\varphi: \quad \omega \to (\mathrm{Res}_{P_1}(\omega), \mathrm{Res}_{P_2}(\omega), \ldots, \mathrm{Res}_{P_n}(\omega)).$$

Образ $U = \mathrm{Im}(\varphi)$ назовем (D, G)-кодом рода g степени $\deg G$.

Goppa's paper

2. Оценка параметров. Кодовое расстояние d и число проверочных символов r оцениваются с помощью теоремы Римана–Роха:

$$d \geqslant \deg G - 2g + 2,$$

$$r \leqslant d + g - 1.$$

Для длины кода известна оценка Хассе–Вейля:

$$|n - (q+1)| \leqslant 2g\sqrt{q}.$$

Лучшие параметры кода получаются для кривых, на которых достигается верхняя граница:

$$n = q + 1 + 2g\sqrt{q}.$$

3. Пример кода. Рассмотрим эллиптическую кривую $x^3 + y^3 + z^3$ над полем $F_4 = \{0, 1, \alpha, \beta\}$. Эта кривая – известная ангармоническая кубика с 9 точками, каждая из которых является флексом (имеет тройную касательную):

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
x	1	0	α	1	0	β	0	α	1
y	0	1	0	1	α	0	β	1	α
z	1	1	1	0	1	1	1	0	0

Все 9 точек образуют абелеву группу типа $Z/(3) \times Z/(3)$. В качестве дивизора G выберем цикл пересечения кривой с коникой $xy + yz + zx = 0$. По теореме Безу

Goppa's paper

deg $G = 6$, поэтому $d = 6$, $r = 6$. Порождающая матрица кода имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha & \alpha & \beta & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & \beta & 0 & 1 & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \alpha & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Тот же самый (D, G)-код над полем F_{64} имеет параметры $n = 81$, $r = 6$, $d = 6$.

Поскольку сумма вычетов дифференциала равна 0, для всех кодовых слов сумма координат равна 0.

4. Двоичные коды. Наибольший практический интерес представляют двоичные коды. Такие коды получаются, если в описанной конструкции положить $q = 2^m$, а затем перейти к подкоду над подполем F_2:

$$n = 2^m + 1 + 2g\sqrt{2^m},$$

$$d \geqslant 2t + 2,$$

$$r \leqslant m(t + g - i) + 1.$$

Здесь m четно, $G = 2G'$, $\deg G' = t + g$, i — индекс специальности дивизора G'.

При малых длинах n лучшими оказываются коды на рациональных кривых, а при больших n — коды на кривых большого рода. Например, кривые Эрмита [2] имеют $n = 1 + 2^{3m/2}$ точек, рациональных над F_{2^m}. Род этих кривых равен $g = 2^{m-1} - 2^{m/2-1}$. Соответствующие коды веса $d \geqslant 2t + 2$ имеют $r < t \log n$ проверочных символов при всех $t > 2g = 2^m - 2^{m/2}$, причем разность $\Delta = t \log n - r \geqslant m(t/2 - g)$.

Пример. $m = 8$, $n = 4097$, $t = 250$, $d \geqslant 502$, $r \leqslant 2961$. Если $g \sim q = 2^m$, $t \sim g$, то получается асимптотика

$$\frac{r}{n} \sim 2\frac{d}{n}\log\frac{n}{d}.$$

Goppa's paper

5. Декодирование. Декодирование (D, G)-кодов сводится к следующей задаче диофантовых приближений в поле алгебраических функций. Введем норму Хемминга $\| \omega \|_H$ дифференциала ω – число полюсов ω. Пусть $\| \omega \|_Q$ обозначает норму, порожденную локализацией в точке Q. Для заданного дифференциала S (синдрома) требуется найти дифференциал ω такой, что

$$\| \omega - S \|_{Q_i} \leqslant a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, l,$$

$$\| \omega \|_H \Rightarrow \min.$$

Здесь Q_i и a_i определяются по дивизору $G = \Sigma m_i Q_i$.

При $g = 0$ эта задача эквивалентна задаче наилучшего рационального приближения p-адических чисел и известен простой алгоритм ее решения (алгоритм Малера).

6. Группа симметрии. Симметрии (D, G)-кода определяются автоморфизмами кривой C. Группа автоморфизмов, рациональных над F_q и оставляющих инвариантным дивизор G, является подгруппой группы симметрии кода. Известна оценка Гурвица для числа автоморфизмов кривой при $g > 1$: $|\mathrm{Aut}(C)| \leqslant 84(g-1)$, но она справедлива лишь в характеристике 0. Для кривых над конечным полем эта группа может быть значительно богаче. Известно много примеров кривых с вычисленной группой $\mathrm{Aut}(C)$. Конструкция кодов на алгебраических кривых позволяет строить коды с заданными симметриями.

Вычислительный центр
Академии наук СССР, Москва

Поступило
10 III 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hamming R.W.* – Bell. Syst. Tech. J., 1950, vol. 29, p. 147–160. 2. *Segre B.* – Atti Accad. naz. Lincei Mem. Cl. sci fis, mat e natur., 1967, vol. 8, 5, p. 136–236.