

מערכות מרובות קיוביטים

מרגע שמושג המכפלה הטנזורית מבוסס, נוכל לנסח את חוקי מכניקת הקוונטים למערכת בת שני קיוביטים. בהמשך נכליל חוקים אלה למערכות מרובות קיוביטים, אך כבר במקרה של שניים מתרחש כל האקשן; זהו מודל פשוט יחסית המאפשר לנו להתמקד בעיקר, לפחות בהתחלה.

1 זוג קיוביטים

כזכור, קיוביט במצב טהור – ברמת ההפשטה המתמטית – מתואר על-ידי איבר מנורמל ב- $\mathbb{C}^2$. מצב טהור של זוג קיוביטים הוא וקטור מנורמל במרחב הילברט $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$.

בהקשר של קיוביט בודד הזכרנו את הבסיס החישובי – בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^2$ המסומן $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. מן הבסיסים המתאימים לכל אחד מהקיוביטים – שנוהה עם השחקנים אליס ובוב – נגזור באופן טבעי את הבסיס על $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, שאיבריו הם

$$|0\rangle \otimes |0\rangle, \quad |0\rangle \otimes |1\rangle, \quad |1\rangle \otimes |0\rangle, \quad |1\rangle \otimes |1\rangle,$$

שאותם כזכור נקצר בכתוב דיראק ל-

$$|00\rangle, \quad |01\rangle, \quad |10\rangle, \quad |11\rangle.$$

זהו הבסיס החישובי המשותף, והסדר Alice-Bob נשמר.

יהי $|\psi_{AB}\rangle$ מצב של מערכת דו-קיוביטית. נאמר ש- $|\psi_{AB}\rangle$ הוא מצב מכפלה (product state) אם קיימים מצבים מנורמלים $|\psi_A\rangle$ ו- $|\psi_B\rangle$ כך ש

$$|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle.$$

אם אין פירוק כזה – $|\psi_{AB}\rangle$ הוא מצב שזור (entangled state).

דוגמה מפורסמת למצב שזור היא מצב בל (Bell state) או צמד EPR על שם איינשטיין-פודולסקי-רוזן. זהו מצב של שני קיוביטים, המוגדר באופן הבא:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

שאנחנו נכתוב לרוב ללא נרמול כ- $|00\rangle + |11\rangle$. השמטת גורם נרמול משותף היא קיצור כתיבה בלבד; בחישובי הסתברויות נחזיר אותו. גם ההוכחה הבאה משתמשת בווקטור הלא-נורמל, שכן כפל בסקלר שאינו אפס אינו משנה אם וקטור הוא מכפלה טנזורית.

נניח בשלילה שקיימים $(a|0\rangle + b|1\rangle)$ ו- $(c|0\rangle + d|1\rangle)$ כך ש

$$(a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) = |00\rangle + |11\rangle.$$

פיתוח אגף שמאל נותן

$$ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle.$$

השוואת מקדמים מחייבת

$$ac = 1, \quad bd = 1, \quad ad = 0, \quad bc = 0.$$

מן $ac = 1$ ו- $bd = 1$ נובע שכולם לא מתאפסים, בסתירה ל- $ad = 0$ או $bc = 0$. מכאן שהשוויון בלתי-אפשרי.

2 אופרטורים על זוג קיוביטים

במודל החישוב שלנו, השערים הפועלים על זוג קיוביטים הם אופרטורים אוניטריים על המרחב הארבע-ממדי. אלה מתארים התפתחות של מערכת מבודדת, ללא מדידה; כללי המדידה יידונו בנפרד בהמשך.

אנחנו כבר מכירים אופרטורים על זוג קיוביטים: עבור כל אופרטור אוניטרי A שאליס יכולה להפעיל, ישנו האופרטור $A \otimes I$ המבצע פעולה על הקיוביט של אליס ולא נוגע בקיוביט של בוב. כך למשל אליס יכולה להפעיל את אופרטור האדמרד על הקיוביט שלה. בכתוב מטריוני

$$H \otimes I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

נבחין כי הפעלה של אופרטור אוניטרי מקומי – כלומר מהצורה $A \otimes B$, כאשר A, B אוניטריים, ובפרט מהצורה $A \otimes I$ או $I \otimes B$ – משמרת מצבי מכפלה: מצב מכפלה נותר מצב מכפלה. יתר על כן, גם הכיוון ההפוך נכון: אם תוצאת הפעולה של אופרטור אוניטרי מקומי על מצב היא מצב מכפלה, אזי גם המצב ההתחלתי היה מצב מכפלה.

אופרטורים אוניטריים מקומיים חשובים, אך כשלעצמם אינם יכולים לייצר שזירה. למעשה, אין צורך במפגש בין הצדדים – אליס ובוב יכולים להפעיל כל אחד את האופרטור המקומי שלו בביתו. האופרטורים המעניינים באמת הם אלה הפועלים במשותף על זוג קיוביטים (אופרטורים דו-קיוביטיים). במימוש פיזיקלי של שער היוצר שזירה נדרש מנגנון המקשר בין הקיוביטים, למשל אינטראקציה ישירה או צימוד באמצעות מערכת מתווכת.

לעיתים נכנה אופרטורים בשם "שערים"; למשל, שער ההיפוך המבוקר (CNOT) שנראה מיד. בהמשך נייצג חישוב קוונטי באמצעות דיאגרמות של מעגלים, בדומה למעגלים דיגטליים בחשמל הקלאסי, והאופרטורים הפועלים על מספר קטן של קיוביטים יישמשו כשערי המעגל. נציין כבר כאן שמקור המונח "שער" הוא באנלוגיה ישירה לשערים לוגיים במחשוב הקלאסי.

2.1 שער CNOT

אחד האופרטורים החשובים ביותר הפועלים על זוג קיוביטים הוא שער היפוך מבוקר, או בשמו הקצר שער CNOT. נתאר תחילה את פעולתו על הבסיס החישובי: אם הקיוביט הראשון, המכונה קיוביט הבקרה (control), הוא $|0\rangle$, לא עושים דבר. אם הוא $|1\rangle$, מפעילים על הקיוביט השני, המכונה קיוביט היעד (target), את שער ההיפוך: מחליפים בין $|0\rangle$ ל- $|1\rangle$. על סופרפוזיציות הפעולה מוגדרת באמצעות לינאריות. בפרט, השער אינו מודד את קיוביט הבקרה.

פורמלית, כדי לתאר את האופרטור המתאים נציג אותו בייצוג מטריציוני:

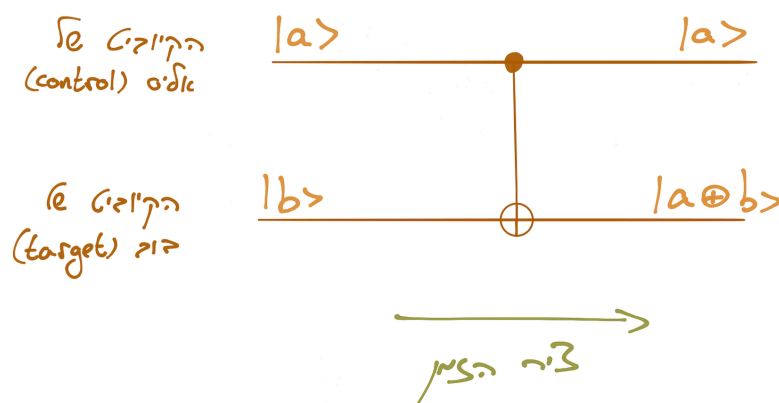
$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נבחין כי התיאור הלא פורמלי שלנו הוא בעצם תיאור פורמלי במובן הזה שתיארנו איך האופרטור פועל על הבסיס החישובי, וכמובן פעולתו נקבעת מכאן על כל המרחב. בבסיס חישובי זה ניתן לכתוב את הפעולה של שער CNOT כך:

$$|a, b\rangle \rightarrow |a, a \oplus b\rangle$$

כאשר $a, b \in \{0, 1\}$ ו- $\oplus$ הוא חיבור מודולו 2.

כאמור, אנו נייצג את הפעולות שלנו בדיאגרמות בהן האופרטורים המופעלים הם השערים. הייצוג של שער CNOT נראה כך:



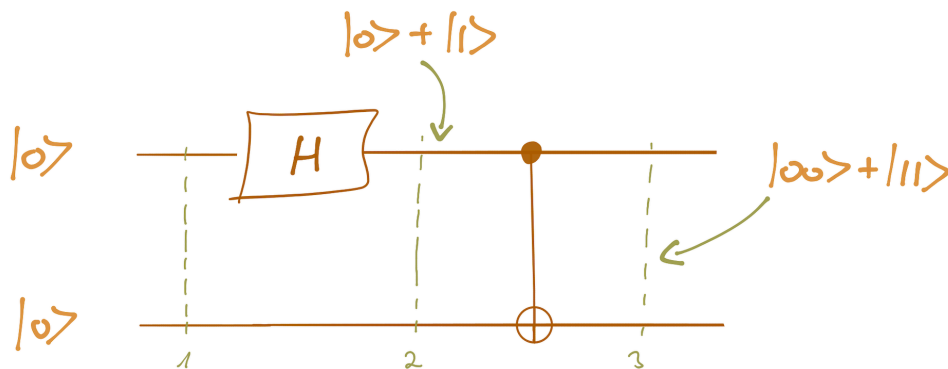
האופרטור CNOT הוא אוניטרי. דרך אחת לראות זאת: הוא הרמיטי ($\text{CNOT}^\dagger = \text{CNOT}$) וגם אינבולוציה ($\text{CNOT}^2 = I$), ולכן $\text{CNOT}^\dagger \text{CNOT} = I$. דרך כללית יותר: CNOT הוא אופרטור פרמוטציה של הבסיס החשובי, ואופרטור פרמוטציה הוא תמיד אוניטרי.

2.1.1 הכנת מצב בל

את אופרטור האדמרד שראינו ביחידות הקודמות מסמנים בדיאגרמה כשער עם התווית H . נסתכל בדיאגרמה הבאה המחשבת את האופרטור

$$\text{CNOT}(H \otimes I)$$

שימו לב: בדיאגרמות מעגלים קוונטיים קוראים את סדר פעולת השערים משמאל לימין, ואילו במכפלת אופרטורים הפעולה מתבצעת מימין לשמאל.



בנקודת זמן 1 המצב של המערכת הוא $|00\rangle$. בנקודת זמן 2, אחרי הפעלת שער האדמרד על ידי אליס, המערכת במצב

$$H |0\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$$

מצב המערכת ביציאה, כלומר בנקודת זמן 3 הוא

$$\text{CNOT} \frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{\text{CNOT} |00\rangle + \text{CNOT} |10\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}.$$

כלומר, המעגל הקטן שלעיל מכין זוג קיוביטים במצב בל כאשר אלו מאותחלים שניהם לאפס.

2.2 אופרטור ההחלפה

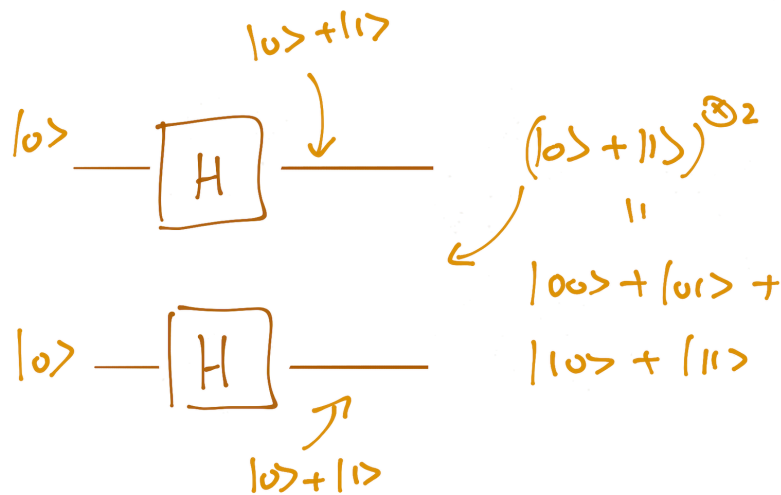
אופרטור שימושי נוסף הוא אופרטור ההחלפה, המסומן SWAP. פעולתו בבסיס החישובי היא החלפת ערכי הקיוביטים: $\text{SWAP} |x, y\rangle = |y, x\rangle$. בייצוג מטריציוני (בבסיס החישובי):

$$\text{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3 אופרטור האדמרד על שני קיוביטים

אופרטור אוניטרי מקומי שימושי מתקבל על-ידי המכפלה הטנזורית של אופרטור האדמרד עם עצמו – כלומר הפעלת H על כל אחד מן הקיוביטים:

$$H^{\otimes 2} = H \otimes H.$$



בבסיס החישובי $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ מתקבל הייצוג

$$H^{\otimes 2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

ולחלופין, עבור $|xy\rangle$ עם $x, y \in \{0, 1\}$:

$$\begin{aligned} H^{\otimes 2} |xy\rangle &= \frac{1}{2} \sum_{a,b \in \{0,1\}} (-1)^{ax+by} |ab\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a,b \in \{0,1\}} (-1)^{\langle (a,b), (x,y) \rangle} |ab\rangle. \end{aligned}$$

כאן המכפלה הפנימית במעריך מחושבת מודולו 2. בפרט, הפעלתו על זוג קיוביטים המאותחלים לאפס נותנת

$$H^{\otimes 2} |00\rangle = \frac{1}{2} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle).$$

3 מדידה ומדידה חלקית

עד כה למדנו כיצד לייצג מערכת של שני קיוביטים ואילו אופרטורים ניתן להפעיל עליה. נותר להבין את כללי המדידה של מערכת כזו על פי המכניקה הקוונטית. הכלל פשוט: בהינתן מצב

$$|\psi\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle,$$

מדידה בבסיס החישובי תיתן את התוצאה ij בהסתברות $|\alpha_{ij}|^2$ לכל $i, j \in \{0, 1\}$. מיד לאחר המדידה המצב יקרוס למצב החישובי המתאים $|ij\rangle$.

נבחין כי הנורמליזציה $\|\psi\|^2 = 1$ מבטיחה ש- $\sum_{i,j} |\alpha_{ij}|^2 = 1$, ולכן אכן מתקבלת התפלגות הסתברות.

במקרים רבים אנחנו לא נבצע מדידה של כלל הקיוביטים במערכת. השאלה המתבקשת היא: מה קורה אם רק אליס מודדת את הקיוביט שלה? מצב זה מכונה מדידה חלקית (partial measurement), כלומר מדידה על תת-מערכת של אליס בלבד. לפי חוקי המכניקה הקוונטית, עבור המצב $|\psi\rangle$ שהוגדר לעיל, מדידה בבסיס החישובי על הקיוביט של אליס נותנת את התוצאה 0 בהסתברות

$$p_0 = |\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2.$$

כלומר, זהו סכום ריבועי המודולים של האמפליטודות המתאימות למקרים שבהם אליס מודדת 0. באופן דומה, ההסתברות שאליס תקבל 1 היא

$$p_1 = 1 - p_0 = |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2.$$

מיד לאחר המדידה, אם אליס מדדה 0, המצב המשותף קרוס ל-

$$|\phi_0\rangle = |0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{p_0}} (\alpha_{00} |0\rangle + \alpha_{01} |1\rangle),$$

ובאופן דומה, אם אליס מדדה 1, המצב המשותף קורס ל-

$$|\phi_1\rangle = |1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{p_1}}(\alpha_{10} |0\rangle + \alpha_{11} |1\rangle).$$

שימו לב שהמצבים לעיל מנורמלים. אכן,

$$\| |\phi_0\rangle \|^2 = \| |0\rangle \|^2 \cdot \frac{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}{p_0} = 1,$$

ובאותו אופן $\| |\phi_1\rangle \|^2 = 1$. נוסף על כך, לא תיתכן חלוקה באפס: אם למשל $p_0 = 0$, התוצאה 0 פשוט אינה יכולה להופיע.

4 צמד EPR ו-Spooky action at a distance

אחת המוזרויות הבולטות בתורת הקוונטים מתגלה כשחושבים על מדידה חלקית של מצב שזור, למשל מצב בל. נניח שאליס ובוב מכינים במעבדה צמד EPR ונפרדים, כל אחד עם הקיוביט שבידו. כאשר אליס מודדת בבסיס החישובי ומקבלת, למשל, 0, המצב המותנה של הקיוביט של בוב הוא מיד $|0\rangle$, גם אם הוא רחוק מאוד. לכאורה, יש כאן השפעה מיידית מרחוק – מהסוג שעורר את התנגדותו של איינשטיין ונקשר לביטוי Spooky action at a distance. אבל חשוב לדייק: התיאור הזה מותנה בתוצאת המדידה של אליס. אין פירושו שבו יכול להבחין באופן מקומי בכך שאליס מדדה, ובוודאי שאין כאן ערוץ תקשורת מהיר מן האור.

אפשר להעלות אנלוג קלאסי: צד שלישי, צ'ארלי, מטיל מטבע ומחלק לשני הצדדים מעטפות אטומות עם פתקים זהים המתארים את התוצאה. אם אליס פותחת את המעטפה (כלומר "מודדת"), היא יודעת מיד גם מה כתוב אצל בוב – ואין בכך פלא. ברוח זו אפשר לשאול אם גם בתיאור הקוונטי חסר "משתנה חבוי" (hidden variable) שיקבע מראש את תוצאות המדידות. שאלת שלמותו של התיאור הקוונטי, בהנחת לוקליות, עמדה במרכז טיעונם של איינשטיין-פודולסקי-רוזן.

אלא שאנלוגיית המעטפות אינה מספרת את הסיפור כולו: בעולם הקוונטי אליס יכולה לבחור כל בסיס מדידה. מדידה בבסיס אחר ניתנת למימוש באמצעות טרנספורמציה אוניטרית מתאימה לפני מדידה בבסיס החישובי, ואם רוצים לשחזר גם את המצב שלאחר המדידה – באמצעות הטרנספורמציה ההפוכה אחריה. למשל, אם אליס מודדת בבסיס $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, הקיוביט של בוב קורס, בהתניה בתוצאתה, לאותו איבר בבסיס. ואכן,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle).$$

עצם האפשרות לבחור בין בסיסים עדיין אינה שוללת הסבר קלאסי: צריך לבדוק אם משתנים חבויים מקומיים יכולים להסביר את מכלול הקורלציות בין בחירות המדידה של שני הצדדים.

מכאן נדמה שאליס אולי יכולה "לקודד" מידע באמצעות בחירת בסיס המדידה שלה. אולם בוב, ללא קבלת מידע

מאליס, אינו יכול להבחין בין הבחירות השונות שלה, ואף לא בין האפשרויות שמדדה לאפשרויות שלא מדדה. זאת אינה רק תוצאה של האקראיות בתשובתה: הטענה היא שהתפלגות התוצאות של כל מדידה מקומית שבו יכול לבצע אינה משתנה. זהו עקרון אי־איתות.

לנקודה זו נשוב כאשר נדון במצבים מעורבים, אבל אפשר לראות אותה כבר עכשיו עבור שני הבסיסים שתיארנו. יהי $|v\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ וקטור יחידה המייצג אחת מתוצאות המדידה של בוב. אם אליס מדדה בבסיס החישובי, ההסתברות שבו יקבל תוצאה זו היא

$$\frac{1}{2}|\langle v|0\rangle|^2 + \frac{1}{2}|\langle v|1\rangle|^2 = \frac{1}{2}.$$

אם אליס מדדה בבסיס $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, ההסתברות היא שוב

$$\frac{1}{2}|\langle v|+\rangle|^2 + \frac{1}{2}|\langle v|-\rangle|^2 = \frac{1}{2},$$

משום שגם זהו בסיס אורתונורמלי. גם ללא מדידה של אליס מתקבלת אותה הסתברות, כפי שאפשר לבדוק ישירות ממצב בל.

ביחידות הקרובות נדון במשפט בל ובניסויים הבוחנים אותו. תחת ההנחות המקובלות, ובהן אי־תלות בין בחירת המדידות למשתנים החבויים, הקורלציות הנצפות שוללות הסברים באמצעות משתנים חבויים מקומיים. הן אינן שוללות כל תאוריה של משתנים חבויים באשר היא.

5 מצבים טהורים ומצבים מעורבים

לאחר שביצענו מדידה חלקית על הקיוביט של אליס, ובהנחה שתוצאתה אינה ברשותנו, אפשר לתאר את המערכת כך: היא נמצאת במצב $|\phi_0\rangle$ בהסתברות p_0 ובמצב $|\phi_1\rangle$ בהסתברות p_1 . זוהי התפלגות הסתברות קלאסית על מצבים קוונטיים. חשוב להבחין בין מדידה שבוצעה ותוצאתה אינה ידועה לנו לבין מדידה שלא בוצעה כלל: אלה עשויים להיות מצבים שונים של המערכת המשותפת.

מפתה לכתוב

$$p_0 |\phi_0\rangle + p_1 |\phi_1\rangle,$$

אבל זה אינו הביטוי הנכון: זהו עירוב של טיפוסים. הביטוי לעיל הוא צירוף לינארי שבו המקדמים משמשים כאמפליטודות, ואילו כאן p_0, p_1 הן הסתברויות קלאסיות. גם החלפתן בשורשים שלהן אינה נותנת את התערובת: סופרפוזיציה ותערובת הסתברותית הן שני דברים שונים.

מצב קוונטי כפי שהוגדר עד כה – וקטור יחידה במרחב הילברט – נקרא **מצב טהור** (pure state). המונח תקף גם למצבים שזורים, למשל מצבי בל. תערובת הסתברותית של מצבים טהורים מאפשרת לתאר גם **מצב מעורב** (mixed state). יש כאן עדינות שנחזור אליה בהמשך: התפלגויות שונות על מצבים טהורים עשויות לתאר בדיוק אותו מצב פיזיקלי. למשל, בחירה אחידה בין $|0\rangle$ ל- $|1\rangle$ ובחירה אחידה בין $|+\rangle$ ל- $|-\rangle$ נותנות אותן הסתברויות

לכל מדידה על הקיוביט. התיאור המתמטי המאחד אותן הוא באמצעות מטריצת צפיפות, שאותה לא נצטרך כרגע. כבר כאן מתחדדת חשיבותם של מצבים מעורבים: לאחר מדידה שתוצאתה אינה ידועה לנו, המערכת אינה בהכרח במצב טהור. למשל, מדידת הקיוביט של אליס במצב בל, בבסיס החישובי וללא שמירת התוצאה, נותנת תערובת שווה של $|00\rangle$ ו- $|11\rangle$, ולא את מצב בל המקורי. לעומת זאת, מדידה של קיוביט במצב $|0\rangle$ בבסיס החישובי משאירה אותו במצב טהור. אם תוצאת המדידה ידועה, המצבים המותנים שכתבנו לעיל הם טהורים.

מבחינה פדגוגית נהוג לדחות את הדיון במצבים מעורבים – וברוב המקרים שניתקל בהם המדידה מתבצעת רק בסוף החישוב, כך שלעתי-עתה ניתן להימנע מהם – אולם טוב להכיר את הרעיון כבר כעת. במהלך הקורס, כשנאמר "מצב" ללא הסתייגות, נתכוון למצב טהור.

6 סדר המדידה: אליס ואז בוב לעומת מדידה בו־זמנית

נבחן את הקשר בין מדידה מדורגת (אליס ואז בוב) לבין מדידה בו־זמנית. כאשר אליס מבצעת מדידה חלקית, בהסתברות p_i אנו במצב $|\phi_i\rangle$ עבור $i = 0, 1$. נניח שאליס מדדה 0, ולכן $p_0 > 0$. אז הקיוביט של בוב נמצא במצב

$$\frac{1}{\sqrt{p_0}}(\alpha_{00} |0\rangle + \alpha_{01} |1\rangle).$$

כשכוב מודד את הקיוביט שבידו, ההסתברויות המותנות הן

$$\Pr(0 | 0 \text{ אליס}) = \left| \frac{\alpha_{00}}{\sqrt{p_0}} \right|^2 = \frac{|\alpha_{00}|^2}{p_0}, \quad \Pr(1 | 0 \text{ אליס}) = \left| \frac{\alpha_{01}}{\sqrt{p_0}} \right|^2 = \frac{|\alpha_{01}|^2}{p_0}.$$

לכן ההסתברות המשותפת שאליס ובוב יקבלו 00 היא

$$\Pr(0 \text{ אליס}) \cdot \Pr(0 \text{ בוב} | 0 \text{ אליס}) = p_0 \cdot \frac{|\alpha_{00}|^2}{p_0} = |\alpha_{00}|^2,$$

והמצב קורס ל- $|00\rangle$. באופן דומה מתקבלות ההסתברויות האחרות בדיוק כפי שהוגדר למדידה בו־זמנית. אותו חישוב מראה שגם אם בוב מודד ראשון מתקבלות אותן ההסתברויות ואותם מצבים סופיים. כאן בסיס המדידה קבועים מראש; אם בוחרים את המדידה השנייה בהתאם לתוצאה הראשונה, מדובר בפרוטוקול אחר.

7 מעבר לשני קיוביטים

ניתן להכליל את הדיון למערכת של n קיוביטים, לכל $n \geq 1$, באופן טבעי. מצב טהור כזה הוא וקטור יחידה ב-

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes n},$$

וכל מה שלמדנו על האופרטורים המותרים ועל חוקי המדידה מוכלל בצורה טבעית. האמור תקף גם למערכות שאינן מורכבות מקיוביטים. למשל, לאליס יכולה להיות מערכת בעלת שלושה מצבי בסיס ולבוב מערכת בעלת חמישה מצבי בסיס; אז המרחב הוא

$$\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^5,$$

והחוקים מוכללים באותו אופן. עם זאת, ברוב המקרים נעסוק בקיוביטים.

נקודה מעניינת – ואף מפתיעה – נוגעת לכמות המידע הנדרשת כדי לתאר מצב קוונטי כללי. מצב של 500 קיוביטים הוא וקטור יחידה ב-

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes 500},$$

ולכן בתיאורו בבסיס החישובי יש 2^{500} אמפליטודות מרוכבות – מספר עצום. זהו גודלו של התיאור הווקטורי הכללי; אין פירוש הדבר שאפשר לחלץ ממדידה מספר כזה של ביטים קלאסיים, ולמצבים מסוימים יש תיאור קצר בהרבה. במצב שזור, בפרט, לא ניתן לתאר את המערכת באמצעות מצב טהור נפרד לכל קיוביט: הקורלציות בין החלקים הן חלק מהותי מן התיאור.

באופן כללי, לכל מערכת קוונטית מתאים מרחב הילברט הנקרא **מרחב המצבים** (state space). מצב טהור מיוצג באמצעות וקטור יחידה במרחב זה, עד כדי פאזה גלובלית; תיאור של מצב כללי דורש גם מצבים מעורבים. המרחב אינו בהכרח מממד סופי. למשל, לתיאור מיקומו הרציף של חלקיק משתמשים במרחב של פונקציות גל.

חשוב להבחין בין מערכת מבודדת לבין מערכת במצב טהור. בידוד מתייחס להעדר אינטראקציה עם הסביבה; טהור מתייחס למצב המערכת. חשבו, למשל, על מצב שבו אליס ובוב מכינים צמד בל, ואליס יוצאת לדרכה ואינה חוזרת. הקיוביט של בוב יכול להיות מבודד מכאן והלאה, ובכל זאת מצבו בפני עצמו מעורב, משום שהוא חלק ממצב שזור. מדידה של אליס אינה משנה את סטטיסטיקות המדידה המקומיות שלו ללא התניה בתוצאתה.

אחד האתגרים המרכזיים בחישוב קוונטי הוא שבידוד מושלם הוא אידיאליזציה: קיוביטים במחשב קוונטי מקיימים אינטראקציות לא רצויות עם הסביבה, ואלה עלולות לפגוע בחישוב. במשך רוב הקורס נשתמש במודל אידיאלי: המערכת מאותחלת במצב טהור, ועד למדידה מופעלים עליה שערים אוניטריים בלבד. בתנאים אלה מצבה נותר טהור. בהמשך, אם הזמן יאפשר, נרחיב את המודל ונעסוק גם במצבים מעורבים וברעש.

מה גורסת תורת הקוונטים לגבי ההתפתחות בזמן? למערכת מבודדת, ללא מדידה, יש אופרטור אוניטרי $U = U(t_1, t_2)$ הנקבע על פי הדינמיקה שלה, כך שלכל מצב התחלתי $|\psi_1\rangle$ המצב בזמן המאוחר יותר הוא $|\psi_2\rangle = U|\psi_1\rangle$. אותו אופרטור פועל על כל המצבים ההתחלתיים האפשריים.

עיקרון זה נובע ממשוואת שרדינגר: מצב קוונטי $|\psi(t)\rangle$ מתפתח לפי

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle,$$

כאשר H הוא ההמילטוניאן (Hamiltonian) של המערכת – אופרטור הרמיטי במקרה הסופי-ממדי שבו אנו מתמקדים. כאן האות H מסמנת המילטוניאן, ולא את שער האדמרד. הקבוע $\hbar$ הוא קבוע פלנק המצומצם,

$\hbar = h/(2\pi)$, וערכו אינו מהותי לדיון הנוכחי. כאשר ההמילטוניאן אינו תלוי בזמן, הפתרון הוא

$$|\psi(t_2)\rangle = \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_2-t_1)}}_{U(t_1,t_2)} |\psi(t_1)\rangle.$$

מאחר שההמילטוניאן הרמיטי, האקספוננט המטריציוני שבנוסחה הוא אוניטרי. גם עבור ההמילטוניאן התלוי בזמן ההתפתחות אוניטרית, אך נוסחת הפתרון דורשת התאמה.

מכאן נובע שבתיאור בדיד בזמן – כפי שמעניין אותנו בהקשר של חישוב קוונטי – ההתפתחות של מערכת מבודדת בין מדידות מתוארת באמצעות אופרטורים אוניטריים.