המכפלה הטנזורית של מרחבים וקטוריים

נניח שאליס מכינה במעבדתה קיוביט במצב

$$|\psi_A\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle ,$$

ובוב מכין, באופן בלתי תלוי, קיוביט במצב

$$|\psi_B\rangle = \beta_0 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle .$$

כרגיל, שני וקטורי המצב מנורמלים. אליס ובוב רוצים לעבוד יחד על הקיוביטים שלהם, ואנחנו רוצים לתאר את המערכת המשותפת. למעשה, אין צורך שהם ייפגשו כדי שנוכל להתייחס לשני הקיוביטים כאל מערכת אחת.

כבר הזכרנו שמרחב המצבים של שני קיוביטים הוא ארבע־ממדי, עם מצבי הבסיס

$$|00\rangle , \quad |01\rangle , \quad |10\rangle , \quad |11\rangle .$$

איך מתקבל וקטור המצב המשותף משני הווקטורים שאליס ובוב הכינו? לשם כך נצטרך להיזכר, או ללמוד, על **המכפלה הטנזורית**.

לפני ההגדרה, כדאי לחשוב על האנלוג ההסתברותי. אם נמדוד בנפרד את שני הקיוביטים בבסיס החישובי, נקבל את זוג התוצאות (i, j) בהסתברות $|\alpha_i|^2|\beta_j|^2$. זהו פשוט כלל הכפל עבור הכנות עצמאיות. כלל ההרכבה הקוונטי אומר דבר חזק יותר: האמפליטודה של מצב הבסיס המשותף $|ij\rangle$ היא $\alpha_i\beta_j$. כלומר,

$$\begin{aligned} |\psi_{AB}\rangle = \alpha_0\beta_0 |00\rangle + \alpha_0\beta_1 |01\rangle \\ + \alpha_1\beta_0 |10\rangle + \alpha_1\beta_1 |11\rangle . \end{aligned}$$

הנוסחה מתיישבת עם ההסתברויות שחישבנו, אבל אינה נובעת מהן בלבד: ההסתברויות במדידה הזו אינן קובעות את הפאזות היחסיות בין האמפליטודות. כלל המכפלה הטנזורית הוא חלק מן המודל הקוונטי של הרכבת מערכות. נכיר כעת את המבנה המתמטי שמאחוריו.

1 מכפלה טנזורית

המכפלה הטנזורית בונה משני מרחבים וקטוריים מרחב חדש, והיא מושג מרכזי במתמטיקה, הרבה מעבר לחישוב קוונטי. נתחיל בנוטציה הרגילה של אלגברה לינארית, ואחר כך נחזור לקיוביטים.

יהיו V ו־ W מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{C}$, שממדיהם m ו־ n, בהתאמה. כדי לבנות את $V \otimes W$, מתחילים בסמלים פורמליים $v \otimes w$, לכל $v \in V$ ו־ $w \in W$, ולוקחים צירופים לינאריים שלהם. על הסמלים מטילים את יחסי הבילינאריות:

$$\begin{aligned}(v + v') \otimes w &= v \otimes w + v' \otimes w,\\ v \otimes (w + w') &= v \otimes w + v \otimes w',\\ (\alpha v) \otimes w &= v \otimes (\alpha w) = \alpha(v \otimes w).\end{aligned}$$

היחסים תקפים לכל וקטורים וסקלרים מן המרחבים המתאימים. אין מטילים יחסים נוספים, מלבד אלה הנובעים מהם ומכללי המרחב הווקטורי. באופן פורמלי, לוקחים את המרחב החופשי על הסמלים הללו ומחלקים בתת־המרחב הנפרש על ידי ההפרשים בין שני האגפים של היחסים. מי שלא פגש בנייה כזו יכול בינתיים לחשוב על צירופים פורמליים שבהם מותר לפתוח סוגריים ולהעביר סקלרים בדיוק לפי הכללים שכתבנו.

השם "בילינאריות" אומר שהפעולה לינארית בכל גורם כאשר הגורם האחר קבוע. בפרט, אם $v = \sum_i a_i v_i$ ו־ $w = \sum_j b_j w_j$, אז

$$v \otimes w = \sum_{i,j} a_i b_j \, (v_i \otimes w_j).$$

כך מתקבלת באופן טבעי מכפלת המקדמים שראינו בפתיחה.

1.1 בסיס וממד

אם $\{v_1, \ldots, v_m\}$ הוא בסיס של V, ו־ $\{w_1, \ldots, w_n\}$ הוא בסיס של W, אז

$$\{v_i \otimes w_j : 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$$

הוא בסיס של $V \otimes W$. הפרישה נובעת מיד מפתיחת הסוגריים בנוסחה האחרונה.

כדי לראות אי־תלות לינארית, נבחר זוג אינדקסים (k, ℓ). הכלל ששולח את $v \otimes w$ למכפלת הקואורדינטה ה־ k של v בקואורדינטה ה־ ℓ של w מכבד את כל יחסי הבילינאריות, ולכן מגדיר פונקציונל לינארי על המרחב שבנינו. הפעלתו על $\sum_{i,j} c_{ij} v_i \otimes w_j$ מחזירה בדיוק את $c_{k\ell}$. לכן, אם הצירוף הוא וקטור האפס, כל מקדמיו אפס. בפרט,

$$\dim(V \otimes W) = mn.$$

2 דוגמה — מערכת של שני קיוביטים

במקרה שלנו, $V = W = \mathbb{C}^2$, כאשר הגורם הראשון שייך לאליס והגורם השני לבוב. דוגמאות לווקטורים במרחב המכפלה הן

$$|0\rangle \otimes |0\rangle\,, \qquad |0\rangle \otimes |0\rangle - 2i\,|1\rangle \otimes |1\rangle\,, \qquad |0\rangle \otimes |+\rangle\,.$$

אנחנו מדברים כאן על וקטורים במרחב, לא בהכרח על מצבים מנורמלים; למשל, הדוגמה השנייה דורשת נרמול כדי לייצג מצב קוונטי.

לפי יחסי הבילינאריות,

$$|0\rangle \otimes |+\rangle = |0\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle\right).$$

בסימון דיראק נהוג לקצר את $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$ ולכתוב $|\psi\rangle\,|\phi\rangle$, $|\psi, \phi\rangle$ או $|\psi\phi\rangle$, כאשר ברור מן ההקשר מהם שני הגורמים. כך, שלוש הדוגמאות לעיל נכתבות

$$|00\rangle\,, \qquad |00\rangle - 2i\,|11\rangle\,, \qquad |0+\rangle\,.$$

הסדר חשוב. בפרט,

$$|0\rangle \otimes |1\rangle \neq |1\rangle \otimes |0\rangle\,.$$

אלה שני איברי בסיס שונים: באחד הקיוביט של אליס הוא אפס ושל בוב אחד, ובאחר התפקידים מתחלפים. יש איזומורפיזם טבעי

$$V \otimes W \longrightarrow W \otimes V, \qquad v \otimes w \longmapsto w \otimes v,$$

אבל החלפת הגורמים אינה אומרת שהם שווים במרחב שבו סדר תתי־המערכות קבוע. ואכן, חשוב לנו להבדיל בין אליס לבוב.

3 המכפלה הטנזורית — ייצוג לאחר בחירת בסיס

עד כה הגדרנו את המכפלה הטנזורית באופן מופשט, בלי לבחור בסיסים. זו דרך נוחה לראות שהבנייה אינה תלויה במערכת קואורדינטות מסוימת. ובכל זאת, כשמגיע הזמן לחשב, כדאי לדעת איך העסק נראה כווקטור עמודה.

עצם הכתיבה של וקטור כעמודה של מספרים מניחה בחירה של בסיס ברקע. למשל, בבסיס החישובי, המצבים של אליס ושל בוב מיוצגים בעמודות

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}.$$

אם נסדר את בסיס המכפלה בסדר

$$|00\rangle\,, \quad |01\rangle\,, \quad |10\rangle\,, \quad |11\rangle\,,$$

אז וקטור הקואורדינטות של המצב המשותף הוא

$$\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_0\beta_0\\ \alpha_0\beta_1\\ \alpha_1\beta_0\\ \alpha_1\beta_1\end{pmatrix}.$$

זהו פשוט התרגום לקואורדינטות של פתיחת הסוגריים:

$$\begin{aligned}|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle &= (\alpha_0\,|0\rangle + \alpha_1\,|1\rangle) \otimes (\beta_0\,|0\rangle + \beta_1\,|1\rangle)\\ &= \alpha_0\beta_0\,|00\rangle + \alpha_0\beta_1\,|01\rangle\\ &\quad + \alpha_1\beta_0\,|10\rangle + \alpha_1\beta_1\,|11\rangle\,.\end{aligned}$$

באופן כללי, עבור וקטורי עמודה $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_m)^{\mathsf{T}}$ ו- $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)^{\mathsf{T}}$, נקבל

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = \begin{pmatrix}u_1\vec{v}\\ u_2\vec{v}\\ \vdots\\ u_m\vec{v}\end{pmatrix}.$$

כלומר, מכפילים את הווקטור השני בכל רכיב של הראשון ומשרשרים את הבלוקים. התוצאה היא עמודה אחת באורך mn, שהכניסה שלה במקום $(i-1)n+j$ היא $u_i v_j$. זהו הייצוג הנקרא גם **מכפלת קרונקר** של וקטורי הקואורדינטות.

דוגמה

נחשב את המצב $|+-\rangle$:

$$\begin{aligned}|+-\rangle &= |+\rangle \otimes |-\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle\right).\end{aligned}$$

כאן, כמו קודם, זיהינו את הווקטורים עם עמודות הקואורדינטות שלהם בבסיסים החישוביים הסדורים.

3.1 לא כל טנזור הוא מכפלה אחת

וקטור מן הצורה $v \otimes w$ נקרא טנזור פשוט. כל איבר של $V \otimes W$ הוא צירוף לינארי של טנזורים פשוטים, אבל אין פירוש הדבר שכל איבר הוא בעצמו טנזור פשוט.

נראה זאת כבר בשני קיוביטים. אם וקטור הוא מכפלה אחת,

$$(a_0|0\rangle + a_1|1\rangle) \otimes (b_0|0\rangle + b_1|1\rangle) = \sum_{i,j\in\{0,1\}} c_{ij}|ij\rangle,$$

אז מקדמיו מקיימים $c_{ij} = a_i b_j$, ולכן בהכרח

$$c_{00}c_{11} = a_0a_1b_0b_1 = c_{01}c_{10}.$$

לעומת זאת, עבור הווקטור המנורמל

$$|\Phi^+\rangle \triangleq \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}},$$

מכפלת המקדמים באגף שמאל היא $1/2$, ובאגף ימין היא 0. לכן זה אינו טנזור פשוט. מצב טהור כזה נקרא מצב שזור: אי אפשר לתאר אותו באמצעות מצב טהור נפרד לאליס ומצב טהור נפרד לבוב. נחזור למשמעות הפיזיקלית של שזירה בהמשך; כרגע חשובה לנו העובדה האלגברית.

4 המכפלה הפנימית במרחב המכפלה הטנזורית

כעת נניח ש־ V ו־ W מצוידים גם במכפלות פנימיות. המכפלה הפנימית המושרית על $V \otimes W$ מקיימת, על טנזורים פשוטים,

$$\langle v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \langle w_1, w_2 \rangle.$$

את הכלל מרחיבים לצירופים לינאריים באמצעות לינאריות בארגומנט השני וצמודה־לינאריות בראשון, בהתאם למוסכמה שלנו למכפלה פנימית מרוכבת.

דרך ישירה לראות שההגדרה תקינה היא לבחור בסיסים אורתונורמליים $\{v_i\}$ ו־ $\{w_j\}$, ולהכריז שבסיס המכפלה $\{v_i \otimes w_j\}$ אורתונורמלי. אם $x = \sum_{i,j} c_{ij} v_i \otimes w_j$ ו־ $y = \sum_{i,j} d_{ij} v_i \otimes w_j$, נקבל

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j} \overline{c_{ij}} d_{ij}.$$

זוהי מכפלה פנימית, והיא מקיימת את הנוסחה לטנזורים פשוטים. הנוסחה הזו קובעת אותה על המרחב כולו, ולכן התוצאה אינה תלויה בבסיסים שבחרנו.

בפרט,

$$\begin{aligned} \|v \otimes w\|^2 &= \langle v \otimes w, v \otimes w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle \\ &= \|v\|^2 \|w\|^2. \end{aligned}$$

לכן

$$\|v \otimes w\| = \|v\| \, \|w\|.$$

אם המצבים של אליס ושל בוב מנורמלים, גם מצב המכפלה שלהם מנורמל:

$$\big\| \, |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle \, \big\| = \| \, |\psi_A\rangle \, \| \, \| \, |\psi_B\rangle \, \| = 1.$$

לכן כלל ההרכבה אכן מחזיר וקטור מצב חוקי של המערכת המשותפת.

4.1 מרחבי הילברט?

כשקוראים על מכניקה קוונטית נתקלים לא פעם במונח "מרחב הילברט". זהו מרחב מכפלה פנימית המקיים גם תכונה של *שלמות*: באופן גס, אין בו "חורים". המכפלה הפנימית מגדירה נורמה, וזו מגדירה מרחק באמצעות

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

מכאן אפשר לדבר על סדרות קושי: סדרות שהמרחק בין כל שני איברים מאוחרים בהן קטן כרצוננו. שלמות אומרת שכל סדרה כזו מתכנסת לאיבר של המרחב.

אפשר לחשוב על הרציונליים כדוגמה למרחב מטרי שיש בו חורים: יש סדרות קושי של רציונליים שהגבול שלהן בממשיים הוא π, אבל הגבול הזה אינו רציונלי. זו אנלוגיה מטרית; הרציונליים אינם כאן דוגמה למרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$.

למזלנו, כל מרחב מכפלה פנימית מממד סופי מעל הממשיים או המרוכבים הוא שלם. בקורס הזה נעבוד במרחבים כאלה. הממד עשוי להיות גדול מאוד — למשל, 2^n עבור מערכת של n קיוביטים — אבל הוא סופי. לכן, לצרכינו, "מרחב הילברט" ו"מרחב מכפלה פנימית" מתארים אותו סוג של אובייקט.

5 אופרטורים במרחב מכפלה טנזורית

אם אליס ובוב רוצים גם לעשות משהו עם הקיוביטים, נצטרך לתאר פעולות על המערכת המשותפת. המקרה הראשון הוא שכל אחד פועל על הקיוביט שלו בלבד.

יהיו $A : V \to V$ ו־ $B : W \to W$ אופרטורים לינאריים. נגדיר את האופרטור $A \otimes B$ על טנזורים פשוטים באמצעות

$$(A \otimes B)(v \otimes w) \triangleq (Av) \otimes (Bw),$$

ונרחיב את הפעולה לינארית:

$$(A \otimes B)\left(\sum_k \alpha_k v_k \otimes w_k\right) = \sum_k \alpha_k (Av_k) \otimes (Bw_k).$$

הכלל מכבד את יחסי הבילינאריות, ולכן אינו תלוי באופן שבו הצגנו את הווקטור כסכום. זו נקודה שחשוב לבדוק, משום שהצגה כסכום של טנזורים פשוטים אינה יחידה.

5.1 תכונות בסיסיות

בילינאריות. לכל אופרטורים וסקלרים מן הממדים המתאימים,

$$(\alpha A + A') \otimes B = \alpha(A \otimes B) + A' \otimes B,$$
$$A \otimes (\beta B + B') = \beta(A \otimes B) + A \otimes B'.$$

הרכבה. מתקיים

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD).$$

כדי להוכיח זאת, די להפעיל את שני האגפים על טנזור פשוט:

$$\begin{aligned}(A\otimes B)(C\otimes D)(v\otimes w) &= (A\otimes B)(Cv\otimes Dw)\\ &= ACv\otimes BDw.\end{aligned}$$

מכיוון שטנזורים פשוטים פורשים את המרחב, השוויון מתקיים על כולו. שימו לב לסדר: בכל גורם נשמר סדר הרכבת האופרטורים.

פעולות מקומיות. אופרטור הזהות על המרחב המשותף הוא

$$I_V\otimes I_W = I_{V\otimes W}.$$

האופרטור $A\otimes I_W$ מתאר פעולה של אליס בלבד, ואילו $I_V\otimes B$ מתאר פעולה של בוב בלבד. מכלל ההרכבה נקבל

$$A\otimes B = (A\otimes I_W)(I_V\otimes B) = (I_V\otimes B)(A\otimes I_W).$$

כלומר, פעולות על גורמים שונים מתחלפות זו עם זו. אין צורך לבצע אותן בו־זמנית, והסדר ביניהן אינו משנה את האופרטור המתקבל. הזהויות נכונות גם כשמפעילים את האופרטורים על וקטור שאינו טנזור פשוט.

האופרטור ההופכי. אם A ו־ B הפיכים, אז

$$(A\otimes B)^{-1} = A^{-1}\otimes B^{-1}.$$

אכן, מכלל ההרכבה,

$$(A\otimes B)(A^{-1}\otimes B^{-1}) = (AA^{-1})\otimes(BB^{-1}) = I_{V\otimes W},$$

וכך גם בסדר ההפוך.

האופרטור הצמוד. ביחס למכפלה הפנימית שהגדרנו,

$$(A\otimes B)^\dagger = A^\dagger\otimes B^\dagger.$$

אפשר לבדוק זאת תחילה על זוג טנזורים פשוטים באמצעות נוסחת המכפלה הפנימית, ואז להרחיב לכל הווקטורים. בפרט, אם A ו־ B אוניטריים, גם $A\otimes B$ אוניטרי, משום ש־

$$(A\otimes B)^\dagger(A\otimes B) = (A^\dagger A)\otimes(B^\dagger B) = I_{V\otimes W}.$$

5.2 יותר משני גורמים

יש זיהוי טבעי בין המרחבים $(V \otimes W) \otimes U$ ו־ $V \otimes (W \otimes U)$, הנתון על טנזורים פשוטים באמצעות

$$(v \otimes w) \otimes u \longmapsto v \otimes (w \otimes u).$$

לאחר הזיהוי הזה נהוג להשמיט סוגריים ולכתוב $V \otimes W \otimes U$ ו־ $v \otimes w \otimes u$. אותה מוסכמה חלה גם על אופרטורים:

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C).$$

זו האסוציאטיביות של המכפלה הטנזורית; היא מאפשרת להזיז סוגריים, אבל לא לשנות את סדר הגורמים.

עבור $r \geq 1$ נסמן

$$A^{\otimes r} \triangleq \underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{r}.$$

כלומר, מופיעים כאן r עותקים של A. בדומה לכך, מרחב המצבים של r קיוביטים הוא

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes r},$$

שממדו 2^r והבסיס החישובי שלו הוא

$$\{|x_1 \cdots x_r\rangle : x_1, \ldots, x_r \in \{0,1\}\}.$$

5.3 ייצוג מטריציוני

לאחר בחירת בסיסים סדורים לכל אחד מן המרחבים, נסדר את בסיס המכפלה כך שהאינדקס של הגורם השני משתנה מהר יותר. אם מטריצות האופרטורים בבסיסים האלה הן $A = (a_{ij})$ ו־ $B = (b_{k\ell})$, המטריצה של האופרטור הטנזורי היא מכפלת הקרונקר:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mm}B \end{pmatrix}.$$

כל כניסה בתצוגה הזו היא בלוק בגודל $n \times n$, והמטריצה כולה בגודל $mn \times mn$. כדי לראות מדוע, די לחשב על איבר בסיס:

$$(A \otimes B)(v_j \otimes w_\ell) = \sum_{i,k} a_{ij} b_{k\ell}\, v_i \otimes w_k.$$

כך מקבלים בדיוק את הכניסות שבמטריצת הבלוקים.

דוגמה — שני קיוביטים. בבסיס הסדור $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$, נקבל

$$X \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I \otimes Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

למשל,

$$(X \otimes I)|00\rangle = |10\rangle, \qquad (X \otimes I)|01\rangle = |11\rangle,$$

ואילו

$$(I \otimes Z)|01\rangle = -|01\rangle, \qquad (I \otimes Z)|11\rangle = -|11\rangle.$$

כשם שלא כל וקטור במרחב המשותף הוא מכפלה אחת, כך לא כל אופרטור על המרחב מתפרק בצורה $A \otimes B$. בהמשך נפגוש שערים הפועלים במשותף על שני קיוביטים ואינם מתפרקים כך.

6 למה מכפלה טנזורית ולא קרטזית?

זו שאלה טבעית: אם רוצים לצרף שני דברים, למה לא פשוט לקחת זוג? המכפלה הקרטזית של המרחבים היא

$$V \times W = \{(v, w) : v \in V,\ w \in W\},$$

עם חיבור וכפל בסקלר רכיב־רכיב:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2),$$
$$\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w).$$

עבור שני גורמים, זהו גם המודל הרגיל של הסכום הישיר $V \oplus W$, ומתקיים

$$\dim(V \times W) = m + n, \qquad \dim(V \otimes W) = mn.$$

אבל הממד הוא רק חלק מן הסיפור. כשמרכיבים מערכות קוונטיות, מצבי הבסיס של המערכת המשותפת מסומנים על ידי *זוגות של מצבי בסיס*: מצב אחד של אליס ומצב אחד של בוב. אלה mn אפשרויות משותפות, ווקטור המצב נותן אמפליטודה לכל אחת מהן. כלומר, לוקחים מכפלה קרטזית של *קבוצות התוויות של הבסיסים*, לא מכפלה קרטזית של המרחבים הווקטוריים עצמם. המרחב הנפרש על ידי תוויות הבסיס המשותפות הוא מרחב המכפלה הטנזורית.

יתרה מזאת, הרכבת שני מצבים שהוכנו בנפרד צריכה להתיישב עם פתיחת סופרפוזיציות בכל צד:

$$(av_1 + bv_2) \otimes w = a(v_1 \otimes w) + b(v_2 \otimes w),$$

ובאופן דומה בגורם השני. המכפלה הטנזורית נבנתה בדיוק כדי לקיים את הבילינאריות הזו. הרכבה באמצעות הזוג (v, w) אינה מקיימת אותה עם הפעולות הרגילות של המכפלה הקרטזית. למשל,

$$(v_1, w) + (v_2, w) = (v_1 + v_2, 2w).$$

ומה קורה דווקא בשני קיוביטים? כאשר $V = W = \mathbb{C}^2$, שני המרחבים הם מממד 4, ולכן הם בהחלט איזומורפיים כמרחבים וקטוריים מופשטים. אין כאן סתירה: איזומורפיזם מופשט אינו חייב לשמר את המשמעות של הגורמים כתתי־מערכות. במכפלה הקרטזית בסיס טבעי הוא

$$(|0\rangle, 0), \quad (|1\rangle, 0), \quad (0, |0\rangle), \quad (0, |1\rangle),$$

כאשר האפסים שמחוץ לסימון דיראק הם *וקטורי האפס*. לעומת זאת, בסיס המכפלה הטנזורית הוא

$$|00\rangle, \quad |01\rangle, \quad |10\rangle, \quad |11\rangle.$$

אפשר לבחור איזומורפיזם ולייצג דרכו אפילו מצב שזור כזוג וקטורים, אבל אז שני הווקטורים אינם מצבי הקיוביטים של אליס ושל בוב. זו בדיוק המשמעות שאסור לאבד בתיאור של מערכת מורכבת.

גם פעולות רכיב־רכיב קיימות במכפלה הקרטזית:

$$(v, w) \longmapsto (Av, Bw).$$

זהו האופרטור $A \oplus B$. לכן עצם האפשרות להפעיל פעולות נפרדות אינה מבחינה בין הבניות. הדרישה הקוונטית היא לפעולה על *האמפליטודות של מצבי הבסיס המשותפים*, בהתאם לכלל

$$v \otimes w \longmapsto Av \otimes Bw.$$

הכלל הזה, יחד עם הרכבת המצבים באמצעות בילינאריות, הוא שמוביל למכפלה הטנזורית ולאופרטורים שהגדרנו עליה.