TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל אביב

מתמטיקה בדידה 2 **חורף תשפ"ה**

מתמטיקה בדידה 2 - פתרון מבחן מסכם מועד ב

תאריך: 21/3/2025

סגל הקורס: פרופסור גיל כהן, יואב גל־צור, איתי כהן.

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- ניתן להיעזר בדף נוסחאות אחד (כתוב משני צדדיו). השימוש במחשבון אסור.
- את התשובות יש לרשום רק על טופס הבחינה. מחברת הבחינה משמשת כטיוטה ולא תיבדק.
- יש לרשום מספר ת.ז. ומספר מחברת בראש כל אחד מהדפים בטופס.
- המבחן מורכב מ־6 שאלות. יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות, לבחירתכם, ולכתוב "לא לבדיקה" כתשובה לשאלה שבחרתם שלא לענות עליה. שווי כל שאלה 20 נקודות. במידה ועניתם על כל 6 השאלות, יבדקו 5 שאלות כלשהן (לאו דווקא הראשונות או אלו עם הניקוד הגבוה ביותר), אז בבקשה המנעו מלעשות כך.
- אלא אם כן נכתב אחרת, יש לתת נימוק קצר לתשובתכם עבור כל שאלה במסגרת המתאימה. במקרים בהם אתם מתבקשים לכתוב הוכחה, יש לכתוב הוכחה מלאה ופורמלית.
  - יש לכתוב את כל התשובות במקום המוקצב ובכתב קריא. תשובות ובהן חריגות לא זניחות מהמקום המוקצב, או תשובות הכתובות בכתב קטן באופן קיצוני או לא ברור לא ייקראו ולא יקבלו ניקוד, או שיקבלו ניקוד חלקי בלבד. תשובות שדורשות מאמצים רבים להבנתן גם כן עלולות לגרור הורדת ציון.
  - לכן, מומלץ בחום לפתור ראשית במחברת ואז לרשום פתרון מסודר במסגרת. כאמור, ישנן זוג מסגרות נוספות למקרה הצורך בסוף הטופס.
- ניתן לרשום "אינני יודע/ת" כתשובה לשאלה או סעיף שלה ולקבל 20% מהניקוד. במקרה זה אין להוסיף שום הסבר.

בהצלחה!

שאלה 1 (20 נקודות) יש לענות על שני הסעיפים הבאים. אין קשר בין הסעיפים.

א. (10 נקודות) יהא n טבעי ו π תמורה על $[n]$. אינדקס $k \in [n]$ נקרא **משפיען** ב־ π אם מתקיים התנאי הבא: אם k נקודת שבת של π אז לכל $j > k$ מתקיים שגם j היא נקודת שבת של π. כמה תמורות של $[n]$ ישנן בהן k משפיען?

כדי ש k יהי משפיען צריכים להתקיים אחד מהמקרים הזרים הבאים: או ש k אינו נקודת שבת, או ש k הוא נקודת שבת וכך גם כל מי שגדול ממנו.
עבור המקרה הראשון, נספור את כל התמורות ונחסר את אלה שבהן k הוא נקודת שבת. ישנן $n!$ פרמוטציות, ואם בוחרים את k להיות נקודת שבת נותר לבחור תמורה על $n-1$ האיברים הנותרים. אלה $(n-1)!$ אפשרויות.
סה"כ במקרה הזה יש לנו $n! - (n-1)!$ אפשרויות.
עבור המקרה השני, התמונה של $k, \cdots, n$ נקבעת ביחידות ונותר לבחור תמורה על המספרים $1, \cdots, k-1$. ישנן $(k-1)!$ אופציות לעשות את זה.
מאחר והמקרים זרים, ישנן $n! - (n-1)! + (k-1)!$ תמורות שבהן k הוא משפיען.

ב. (10 נקודות) כמה עצים על n צמתים ישנם כך שהמרחק בין כל שני צמתים הוא לכל היותר 3?

עבור $n \leq 4$ כל העצים מקיימים את התנאי, ולכן יש n^{n-2} עצים.
עבור $n > 4$:
נחלק למקרים זרים. נספור בנפרד עצים שבהם יש זוג קודקודים ממרחק בדיוק 3 ועצים שבהם כל זוג קודקודים הוא במרחק לכל היותר 2.
עצים בהם המרחק המקסימלי הוא לכל היותר 2 חייבים להיות בצורת פרח. יש לנו n אפשרויות לבחור קודקוד מרכזי, כלומר n עצים שבהם המרחק בין כל שני צמתים הוא לכל היותר 2.
אם יש שני קודקודים שהמרחק ביניהם הוא 3 נסמנם ב $a \sim b \sim c \sim d$. מתקיים שכל שאר הקודקודים מחוברים לקודקודים b ו c, אחרת היינו יכולים למצוא שני קודקודים ממרחק 4. זהו גם תנאי מספיק. אם יש שני קודקודים מרכזיים b ו c וכל שאר הקודקודים מחוברים אליהם אז המרחק בין כל שני צמתים הוא לכל היותר 3. בנוסף, אם לפחות קודקוד אחד מחובר ל b ולפחות קודקוד אחד מחובר ל c אז המרחק המקסימלי בין קודקודים הוא בדיוק 3.
אם כך, נבחר שני קודקודים מרכזיים b ו c. יש לנו $\binom{n}{2}$ אפשרויות. לאחר מכן, נבחר עבור כל קודקוד למי הוא מחובר, ישנן שתי אפשרויות עבור כל אחד מ $n-2$ הקודקודים הנותרים. אלה 2^{n-2} אפשרויות. נחסר מזה את המקרים שבהם אף קודקוד לא מחובר ל b או אף קודקוד לא מחובר ל c. אלה שתי אפשרויות. בסך הכל נותרו לנו $2^{n-2} - 2$ אפשרויות. אז ישנם $\binom{n}{2}(2^{n-2} - 2)$ עצים עם מרחק מקסימלי 3 בין קודקודים.
בסך הכל, מאחר והמקרים זרים, ישנם $n + \binom{n}{2}(2^{n-2} - 2)$ עצים שעונים על תנאי השאלה.

שאלה 2 (20 נקודות) יש לענות על שני הסעיפים הבאים. אין קשר בין הסעיפים.

א. (10 נקודות) כמה פתרונות בטבעיים (כלומר, $x_1, \ldots, x_7 \geq 0$ שלמים) יש למשוואה הבאה

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_5 + x_6 + x_7)^2 = 275$$

נבחין כי $275 = 11 \cdot 5^2$ ולכן הפתרונות נחלקים לשני סוגים ־ מסוג א

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11 \qquad x_5 + x_6 + x_7 = 5$$

ומסוג ב

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 275 \qquad x_5 + x_6 + x_7 = 1$$

ישנם

$$\binom{11+4-1}{4-1} \cdot \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{14}{3}\binom{7}{2}$$

פתרונות מהסוג הראשון, ובאופן דומה

$$\binom{275+4-1}{4-1} \cdot 3 = 3\binom{278}{3}$$

פתרונות מהסוג השני. שימו לב לשימוש בעיקרון הכפל. מעיקרון החיבור, מספר הפתרונות הוא סכום שני הביטויים לעיל.

טעויות נפוצות. כמעט כל הסטודנטים פספסו את הפתרונות מהסוג השני. טעות נפוצה נוספת היתה לקחת ריבוע של בינום שמתאים למחוברים שסכומם 5 (עם ההגיון, אני מניח, שה־5 מועלה בריבוע ולכן גם מספר האפשרויות, אבל אין זה המצב).

ב. (10 נקודות) עבור אילו ערכי $n \in \mathbb{N}$ מתקיים שהביטוי הבא שלם?

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^n + \left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)^n$$

על פי נוסחת הבינום, אחרי חישוב קצרצר,

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^n + \left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{3}^{n-k}\sqrt{7}^{k}(1+(-1)^k)$$

נבחין לכן שהמחוברים המתאימים ל k אי־זוגי, מתאפסים ואנחנו נשארים עם הביטוי

$$2\sum_{\substack{k=0\\ k\ \text{EVEN}}}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{3}^{n-k}\sqrt{7}^{k}$$

מכאן רואים שכש־ n זוגי אז כל המחוברים בסכום שלמים ולכן המספר שלם.

עבור n אי זוגי, נכתוב את הביטוי בצורה הבאה

$$2\sqrt{3}\cdot\sum_{\substack{k=0\\ k\ \text{EVEN}}}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{3}^{n-1-k}\sqrt{7}^{k}$$

כעת שוב כל המחוברים בסכום הם שלמים שהרי $n-1$ זוגי, ולכן הביטוי כולו הוא כפולה שלמה ־ שאינה אפס ־ של $\sqrt{3}$. נסכם: ערך הביטוי שלם אם ורק אם n זוגי.

טעויות נפוצות. לזכרוני, אף סטודנט לא הוכיח שערך הביטוי אינו שלם כאשר n אי־זוגי. סטודנטית אחת רשמה שצריך להוכיח זאת ושהיא צריכה לחשוב על זה :)

שאלה 3 (20 נקודות) נסתכל על קבוצת הוקטורים מאורך 9 מעל הקבוצה $[9]$. וקטור $x \in [9]^9$ יקרא **מיוחד** אם קיים $i \in [9]$ כך שבקואורדינטה ה־i ישנה הספרה i. לדוגמה, $(1,1,1,4,1,1,1,1,1)$ הוא מיוחד, ו־ $(6,1,1,6,1,1,1,1,1)$ איננו מיוחד. כמה וקטורים מיוחדים ישנם? תשובה עם סימן סכימה תזכה לניקוד חלקי.

עבור $i \in \{1,\dots,9\}$ תהי A_i קבוצת כל הוקטורים בהם ישנה הספרה i בקואורדינטה ה־ i.
נשים לב כי לכל k קבוצות כנל מתקיים: $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = 9^{9-k}$ (מכיוון שבכל הוקטורים בקבוצה זו יש k קואורדינטות שערכן ידוע, ואין מגבלות על שאר המקומות).
מהכלה והדחה סימטרי מתקיים:

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_i A_i\right| &= \textstyle\sum_{k=1}^{9}(-1)^{k+1}\binom{9}{k}9^{9-k}\\ &= 9^9 + \textstyle\sum_{k=0}^{9}(-1)^{k+1}\binom{9}{k}9^{9-k}\\ &= 9^9 - \textstyle\sum_{k=0}^{9}(-1)^{k}\binom{9}{k}9^{9-k}\\ &= 9^9 + (9-1)^9\\ &= 9^9 - 8^9\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מהבינום של ניוטון.
פתרון אלטרנטיבי: יש 8^9 וקטורים לא מיוחדים: כי הקואורדינטה ה־ i יכולה להכיל רק 8 ספרות.
לפי עקרון המשלים, המספר הכולל הוא $9^9 - 8^9$.
פתרון אלטרנטיבי נוסף: מספר הוקטורים המיוחדים עם בדיוק k קואורדינטות בהן הערך בקואורדינטה הוא האינדקס:

$$\binom{9}{k} \cdot 8^{9-k}$$

נסכום על פני $k = 1 \dots 9$:

$$\sum_{k=1}^{9}\binom{9}{k}8^{9-k} = -8^9 + \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}8^{9-k} = 9^9 - 8^9$$

כאשר המעבר האחרון נובע מהבינום של ניוטון.

שאלה 4 (20 נקודות) בשאלה זו שני סעיפים ־ אין קשר בין הסעיפים. יהי G גרף עם $n \geq 4$ קודקודים. הניחו כי n זוגי.

א. (8 נקודות) הראו כי אם מספר הצלעות הוא $m \geq (n/2)+1$, אז בגרף קיים מסלול פשוט בצמתים מאורך 2.

ממשפט לחיצות הידיים מתקיים

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2m \geq n+2$$

מעקרון שובך היונים, קיים קודקוד עם דרגה 2 לפחות. הוא ושניים משכניו יוצרים מסלול מאורך 2.

ב. (12 נקודות) הראו כי אם דרגתו של כל קודקוד היא לפחות $2\sqrt{n}$, אז כל קודקוד בגרף שייך למעגל פשוט בצמתים כלשהו מאורך 4. בסעיף זה ניתן להניח כי $\sqrt{n}$ הוא מספר שלם.

נשים לב כי קודקוד v שייך למעגל פשוט מאורך 4 אם ורק אם שני שכנים של v חולקים שכן שאיננו v.
נניח בשלילה כי v איננו שייך למעגל מאורך 4, אזי כל שני שכנים של v לא חולקים שכן משותף מלבד v. כלומר, לכל אחד מהם יש לפחות $2\sqrt{n}-1$ שכנים ייחודיים. ומספר השכנים הכולל של שכניו של v הוא לפחות

$$\sum_{u:(u,v)\in E} \deg(u) - 1 \geq \sum_{u:(u,v)\in E} 2\sqrt{n} - 1 \geq 2\sqrt{n}(2\sqrt{n}-1) = 4n - 2\sqrt{n} > n$$

וזו סתירה לכך שמספר הקודקודים הוא n.

שאלה 5 (20 נקודות) במדינת בדידהסטאן יש $2n$ איים מסודרים במעגל. התושבים החליטו לבנות גשרים כדי לחבר את האיים בזוגות, כך שכל אי יהיה מחובר בדיוק לאי אחד אחר. בנוסף, בגלל שיקולים הנדסיים, על הגשרים להיות ישרים.

א. (10 נקודות) בכמה דרכים אפשר לבנות את הגשרים?

עבור האי הראשון יש לנו $2n-1$ דרכים לבחור למי הוא יהיה מחובר. אחרי שחיברנו אותו, נותרו לנו $2(n-1)$ איים שצריכים להתחלק לזוגות. נסמן a_n להיות מספר הדרכים לחלק $2n$ איים לזוגות. מהטיעון לעיל, מתקיים

$$a_n = (2n-1)a_{n-1} = (2n-1)(2n-3)a_{n-2} = \cdots = (2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2n+3)\cdot a_1.$$

כמובן, $a_1 = 1$. לכן מספר האפשרויות הוא $(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$ כלומר מכפלת כל המספרים האי זוגיים עד $2n$. נוכל לכתוב את זה גם בתור

$$a_n = \frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdot \cdots \cdot 2n}$$

במכנה של השבר הזה ישנם n מספרים זוגיים. נוכל להוציא החוצה 2^n.

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n(1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n)} = \frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$$

עכשיו כשאנחנו יודעים את התשובה, נוכיח את נכונותה באינדוקציה. מקרה הבסיס הוא $\frac{2!}{2\cdot 1!} = a_1 = 1$. הצעד הוא

$$a_{n+1} = (2(n+1)-1)a_n = (2n+1)\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)}\cdot\frac{(2(n+1))!}{2^{(n+1)}\cdot(n+1)!} = \frac{(2(n+1))!}{2^{(n+1)}\cdot(n+1)!}.$$

ב. (10 נקודות) בכמה דרכים אפשר לבנות את הגשרים, אם בנוסף אסור ששני גשרים יצטלבו?

נסמן ב b_n את מספר הדרכים החוקיות לבנות n גשרים. כאשר נמקם את הגשר הראשון, נחלק את האיים לשתי קבוצות. בכל קבוצה, נצטרך לבנות גשרים בלי שהם יצטלבו. אם נותרו מספר אי זוגי של איים בכל צד של הגשר, אין שום דרך למקם את הגשרים בלי הצטלבות. לכן הגשר הראשון חייב לחלק את האיים לשתי קבוצות בגודל זוגי.
אם כך, אחרי שבנינו את הגשר הראשון חילקנו את האיים לשתי קבוצות בגודל זוגי, $2k$ ו $2(n-k-1)$ עבור k כלשהו בין 0 ל $n-1$. נותר לנו לבנות k גשרים באופן חוקי בצד אחד ו $n-k-1$ גשרים באופן חוקי בצד השני.

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k b_{n-k-1}.$$

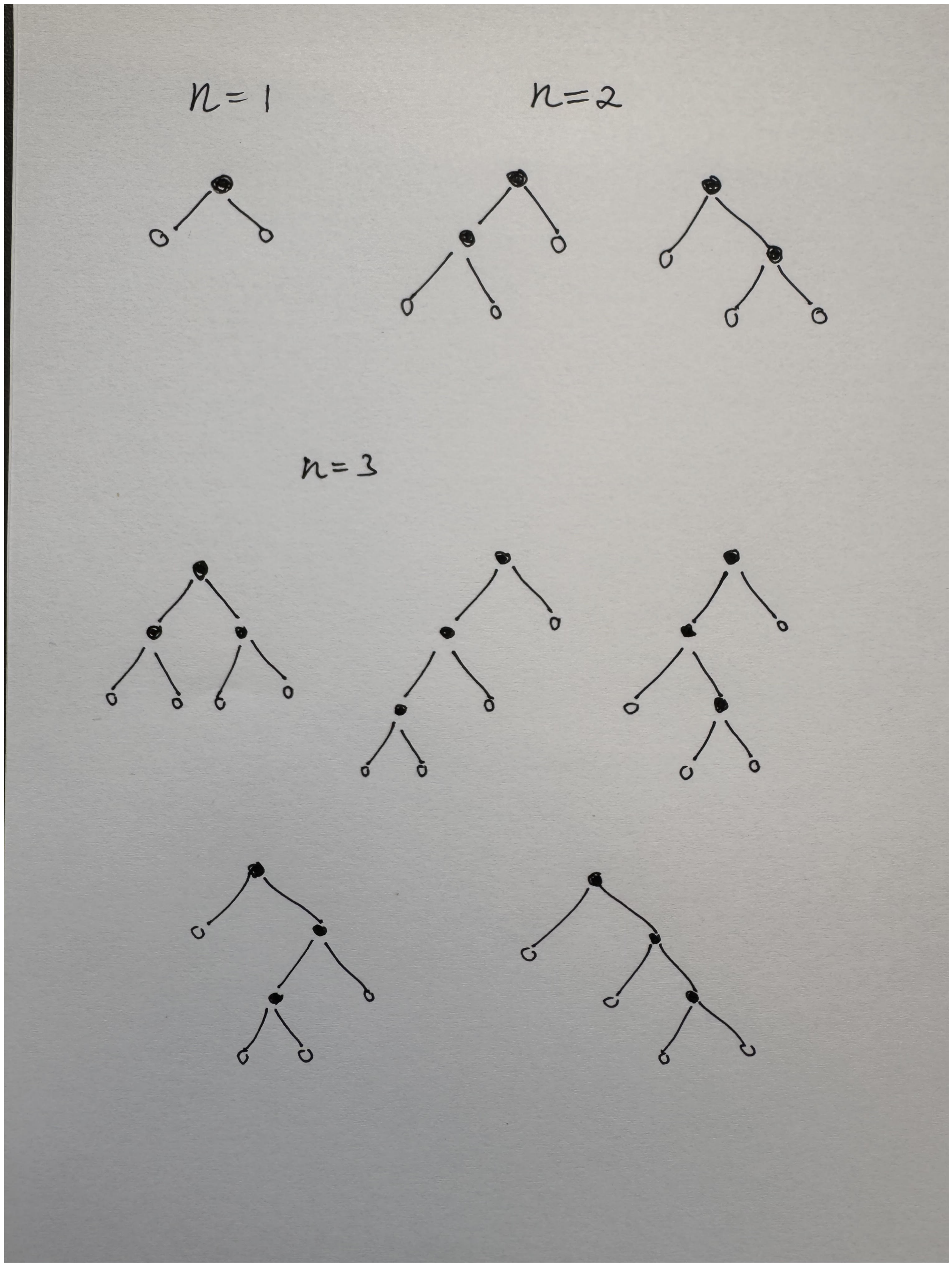
זו בדיוק נוסחת הנסיגה של מספרי קטלן. נוודא את מקרה הבסיס

$$b_0 = 1; \quad b_1 = 1.$$

לכן כמות הדרכים לבנות את הגשרים כך שלא יהיו הצטלבויות היא מספר קטלן, $b_n = C_n$

שאלה 6 (20 נקודות) נגדיר את המחלקה הקומבינטורית $\mathcal{T}$ המכילה עצים בינארים (כלומר, לכל צומת שאינו עלה יש בדיוק שני בנים) מסודרים, מושרשים. פונקציית הגודל מוגדרת להיות מספר הצמתים בעץ **שאינם עלים**. תזכורת: צומת נקרא עלה אם דרגתו היא 1 בדיוק.

א. (5 נקודות) ציירו את כל העצים הנ"ל עבור כל אחד מהגדלים הבאים: $n = 1, 2, 3$.



ב. (7 נקודות) כתבו יחס סימבולי עבור המחלקה $\mathcal{T}$

יחס סימבולי אפשרי הוא

$$\mathcal{T} = \bullet \times (\mathcal{T} \times \mathcal{T} + \circ \times \mathcal{T} + \mathcal{T} \times \circ + \circ \times \circ)$$

כאשר $\bullet$ הוא אטום המייצג צומת פנימי, ו־$\circ$ מייצג עלה וגודלו 0.

ג. (8 נקודות) תוך שימוש ביחס הסימבולי שמצאתם, חשבו את מספר העצים הנ"ל מגודל n.

נסמן ב־ $T(x)$ את הפונקציה היוצרת המתאימה למחלקה $\mathcal{T}$. מסעיף ב מתקיים

$$T(x) = x\big(T(x)^2 + 2T(x) + 1\big)$$

או

$$xT(x)^2 + (2x-1)T(x) + x = 0$$

על כן, הפתרון המבוקש הוא אחד מבין

$$\frac{1-2x \pm \sqrt{(2x-1)^2 - 4x^2}}{2x} = \frac{1-2x \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

כפי שראינו בהרצאה

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4^n} (-1)^{n+1} C_{n-1} (-4)^n x^n = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} x^n$$

כל המחוברים שליליים ולכן הפתרון המבוקש מתקבל על ידי זה עם הסימן השלילי. נציב ונקבל

$$\frac{-2x + 2\sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} x^n}{2x} = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} C_{n-1} x^n}{x} = \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$$

כלומר, מספר האובייקטים מגודל n הוא מספר קטלן ה־n־י עבור $n > 0$ ואפס עבור $n = 0$, ואכן אין אובייקטים מגודל 0 במחלקה.