נוסחת הבינום

גיל כהן

נוסחת הבינום של ניוטון

כולנו זוכרים ש

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

ועם קצת מאמץ אפשר לחשב את

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+\underline{2a^2b}+\underline{b^2a}+\underline{a^2b}+\underline{2ab^2}+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

ברמה העקרונית אפשר להמשיך ולפתח את $(a+b)^n$ עבור כל חזקה $n\geq 1$ וזה

תוך שימוש בפיתוח של חזקות קודמות. מעשית, זה די בעייתי.

נוסחת הבינום של ניוטון

נסתכל שוב על הבעיה: נגיד ואנו רוצים לפתח את

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$

אנו יודעים שמכפלת המחוברים הנ"ל תתרגם לסכום של כפולות

כאשר נבחר כל כפולה המתקבלת מבחירת איבר מהסוגריים הראשונים

מוכפל באיבר מהסוגריים השניים כפול איבר מהסוגריים האחרונים.

a	a	a
a	a	b
a	b	a
a	b	b
b	a	a
b	a	b
b	b	a
b	b	b

נוסחת הבינום של ניוטון

נסתכל שוב על הבעיה. נניח ואנו רוצים לפתח את

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$

$$
\begin{array}{c ccc}
 & a & a & a \\
 & a & a & b \\
+ & a & b & a \\
 & a & b & b \\
 & b & a & a \\
 & b & a & b \\
 & b & b & a \\
 & b & b & b \\
\hline
\end{array}
$$

מספר המחרוזות באורך 3 מעל $\{a,b\}$ עם בדיוק 3 b-ים.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

מספר המחרוזות מעל $\{a,b\}$ באורך 3 עם בדיוק 2 a-ים.

נוסחת הבינום של ניוטון

לכל $n \geq 0$

מספר המחרוזות באורך n מעל
$\{a,b\}$ עם בדיוק k a-ים

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= a^n + n a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + n a b^{n-1} + b^n$$

שאלה 1

הוכיחו כי לכל $0\le k\le n$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

פתרון

נזכור כי $1+1=2$:)

מנוסחת הבינום

$$2^n = (\underset{a}{1}+\overset{b}{1})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

שאלה 2

הוכיחו כי לכל $0 \le k \le n$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

פתרון

נזכור כי $1-1=0$:

מנוסחת הבינום

$$0 = (\underbrace{\overset{b}{1}-1}_{a})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

שאלה 3

הוכיחו כי לכל $0 \leq k \leq n$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

פתרון

שאלה 3

הוכיחו כי לכל $0 \le k \le n$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

פתרון

מנוסחת הבינום עם $a=x$, $b=1$ נקבל כי לכל $x \in \mathbb{R}$

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

זהו שוויון בין שני פולינומים!

שאלה 3

הוכיחו כי לכל $0 \le k \le n$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}$$

פתרון

$$(x+1)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k}$$

אם שני הפולינומים זהים, כך גם הנגזרות שלהם!

ולכן

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k\, x^{k-1}$$

נציב $x=1$ ונקבל

$$n\cdot 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

זהות פסקל

הוכחו כי לכל $n \geq 1$ ו- $1 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

זהות פסקל

הוכח כי לכל $n \geq 1$ ו- $1 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

פתרון מכוער

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k)!}\underbrace{\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right]}_{\frac{n}{k(n-k)}} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

זהות פסקל

הוכיחו כי לכל $n\geq 1$ ו- $1\leq k\leq n$

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

פתרון לא מכוער

נעזר בספירה כפולה. נשאל כמה תתי קבוצות מגודל k יש ל- $[n]$. מצד אחד $\binom{n}{k}$.

את אגף ימין נספור בעזרת חלוקה למקרים - אלו המכילות את האיבר 1 ואלו שאינן.

$$\underbrace{\binom{n-1}{k}}_{\text{מספר הקבוצות שאינן מכילות את 1}}+\underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{\text{מספר הקבוצות שמכילות את 1}}$$

משולש פסקל

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

זהות פסקל

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\vdots$$