

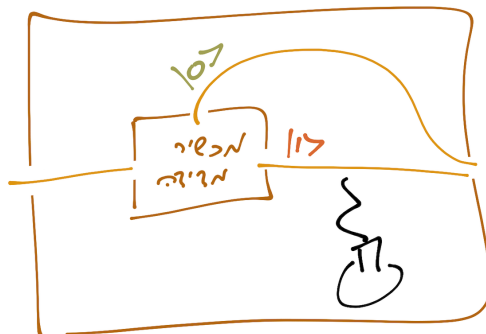
ניסוי הפצצה של אליצור-ויידמן

ביחידה זו נדון בניסוי מחשבתי מפורסם בפיזיקה הקוונטית, המכונה "ניסוי הפצצה" של אליצור-ויידמן. הניסוי הוצג בשנת 1993 בידי הפיזיקאים הישראלים אבשלום אליצור (מכון ויצמן למדע) ולב ויידמן (אוניברסיטת תל-אביב). הוא מדגים את עקרון "מדידה ללא אינטראקציה" (interaction-free measurement): ניתן להסיק מידע על אובייקט – במקרה שלנו, פצצה רגישה לאור – מבלי שהאובייקט יבוא במגע פיזי עם החלקיק המבצע את המדידה.

אף שהחל כניסוי מחשבתי, הניסוי בוצע בהצלחה גם בתנאי מעבדה ואישש את תחזיות מכניקת הקוונטים. זהו הישג מרשים המדגים את עקרונותיה הייחודיים של התיאוריה הקוונטית ואת האפשרות להפיק מידע על מערכת באופן עקיף. נציג את הניסוי במונחים מופשטים של קיוביטים; עם זאת, קל למצוא תיאור ניסיוני המבוסס על פוטונים. קוראים בעלי נטייה פיזיקלית מוזמנים לעיין במקורות ברשת ולהשוות להצגה שלהלן.

ברגש חשוד מוסר לכם "קופסה שחורה" – אי-אפשר להציץ לתוכה. לקופסה יש כניסה ויציאה לקיוביט (למשל פוטון). ידוע לכם שאתם באחת משתי אפשרויות: (א) הקופסה ריקה, והקיוביט היוצא זהה לנכנס; (ב) בתוך הקופסה יש פצצה המחוברת למכשיר מדידה הבודק את הקיוביט בבסיס החישובי. אם מתקבלת התוצאה $|0\rangle$, הקיוביט – שכעת במצב $|0\rangle$ – עובר הלאה ושום דבר נוסף אינו קורה; ואם מתקבלת $|1\rangle$, הפצצה מתפוצצת. לשם הדרמטיות נניח שהפיצוץ כולל גם אתכם – ולכן תרצו מאוד להימנע מאפשרות זו.

מן הפיזיקה הקלאסית ברור שאין הרבה מה לעשות. בניסוי האנלוגי עם ביטים במקום קיוביטים, אין טעם לשלוח את הביט 0: הוא אינו מעביר מידע על מצב הקופסה. לעומת זאת, אם נשלח את הביט 1 ובאמת יש פצצה, היא תתפוצץ – "הניתוח הצליח והחולה מת". מכאן שבמסגרת קלאסית אין דרך להבחין בבטחה בקיום פצצה בלי להסתכן בפיצוץ.



ביחידה זו נציג פתרון קוונטי לבעיה: פרוצדורה המאפשרת להבחין בין המקרים "יש פצצה" ו"אין פצצה", כך שהסתברות הפיצוץ (אם אכן יש פצצה) ניתנות להקטנה כרצוננו. הקטנת ההסתברות תדרוש יותר שלבים, ולכן הפרוצדורה תארך זמן רב יותר.

זיהוי פצצה ללא אינטראקציה: הגרסה הבסיסית

כצעד ראשון נבחן גרסה פשוטה שבה שולחים את המצב $|+\rangle$ אל הקופסה. הבה ננתח את המקרה הזה, כאשר מודדים את התוצאה בבסיס $\{|+\rangle, |-\rangle\}$. אם אין פצצה, הקיוביט עובר ללא שינוי ויוצא במצב $|+\rangle$. לכן, מדידה ביציאה בבסיס $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ תניב את התוצאה $|+\rangle$ בהסתברות 1. מה קורה במקרה בו יש פצצה?

ובכן, כאשר יש פצצה, מכשיר המדידה המחובר אליה – המודד בבסיס החישובי – ייתן את התוצאה $|1\rangle$ בהסתברות $1/2$, ובמקרה זה הפצצה מתפוצצת. אם מתקבלת $|0\rangle$ (גם כן בהסתברות $1/2$), הקיוביט קורס למצב $|0\rangle$ ועובר בשלום. ביציאה, במדידה בבסיס $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, נקבל $|+\rangle$ בהסתברות $1/2$ ו- $|-\rangle$ בהסתברות $1/2$.

מכאן שהפרוצדורה פשוטה: נשלח קיוביט במצב $|+\rangle$ ונמדוד ביציאה בבסיס $\{|+\rangle, |-\rangle\}$. אם התקבלה התוצאה $|+\rangle$ – נכריז "אין פצצה"; אם התקבלה $|-\rangle$ – נכריז "יש פצצה" (במידה ואנחנו עדיין בחיים...)

על פי האנליזה שערכנו, במקרה ואין פצצה אנחנו נענה את התשובה הנכונה בהסתברות 1. במקרה בו יש פצצה, אנחנו נתפוצץ בהסתברות חצי אבל – וזה הקסם – אם לא התפוצצנו – אנו נגיד "יש פצצה" בהסתברות חצי. כלומר, אם אכן יש פצצה – אנו מתפוצצים בהסתברות $1/2$, אך (וזהו הקסם) בתרחיש בו שרדנו נזהה את קיומה של הפצצה בהסתברות $1/2$, ובכך לעיתים נאתר פצצה מבלי להפעיל אותה.

מובן שסיכוי $1/2$ לשרוד אינו מזהיר (אף שהוא עדיף לאינ-ערך על סיכוי אפס). כעת נעבור לתאר את האלגוריתם המלא, אשר מאפשר להקטין כרצוננו את ההסתברות להפעיל את הפצצה – במחיר ריבוי שלבים וזמן ריצה ארוך יותר.

זיהוי פצצה ללא אינטראקציה: האלגוריתם המלא

בגרסה הבסיסית של זיהוי הפצצה הכנסנו את הקיוביט במצב $|+\rangle$ כלומר, בזווית של 45° מהציר ה"הבטוח" $|0\rangle$ מה שמיד סיכן אותנו בהסתברות של חמישים אחוז להפעיל את הפצצה. הרעיון באלגוריתם המלא הוא להיות עדינים יותר ולהתחיל את הניסוי עם קיוביט שקרוב יותר לציר ה $|0\rangle$. לצורך כך נגדיר את אופרטור הסיבוב היוניטרי

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

נבחין כי $R_\theta^\dagger = R_{-\theta}$ ו- $R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$, ובפרט $R_{\pi/2} |0\rangle = |1\rangle$.

נבחן מה קורה כאשר מבצעים את הניסוי על קיוביט שמאותחל ל- $|0\rangle$, ומפעילים עליו – מיד לפני הכניסה לקופסה – את R_θ עבור θ שנחשיב כקרוב לאפס.

נניח שיש פצצה בקופסה. במקרה זה הקיוביט הנכנס נמדד בבסיס החישובי; לאחר הסיבוב R_θ מצב הקלט הוא

$$R_\theta |0\rangle = \cos \theta |0\rangle + \sin \theta |1\rangle.$$

לפיכך ההסתברות להפעיל את הפצצה (כלומר למדוד $|1\rangle$) היא

$$\Pr[\text{פיצוץ}] = \sin^2 \theta,$$

נזכור כי $\sin \theta \approx \theta$ עבור ערכי θ קטנים. ניתן לראות זאת מפיתוח טיילור של הפונקציה

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \dots$$

ליתר דיוק, לצרכינו אף מתקיים $\sin \theta \leq \theta$ לכל $\theta \geq 0$. על כן, ההסתברות להפעלת הפצצה חסום על ידי θ^2 .
אחרת, הקיוביט יוצא במצב $|0\rangle$.

בהינתן הניתוח לעיל, נציע את האלגוריתם הבא. יהי $n \in \mathbb{N}$, ונגדיר

$$\theta = \frac{\pi}{2n} = \frac{90^\circ}{n}.$$

נפתח בקיוביט המאותחל למצב $|0\rangle$. נחזור על הצעד הבא n פעמים: מיד לפני הכניסה לקופסה נפעיל על הקיוביט את R_θ , נשלח אותו לקופסה, ואם יצא בשלום נמשיך לסבב הבא על ידי שליחתו של הקיוביט שיצא בחזרה - כלומר נפעיל עליו R_θ ונכניס אותו לקופסה. כך נשמיך ובתום n הסבבים נמדוד את הקיוביט ביציאה בבסיס החישובי $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

בהיעדר פצצה אנו מסובבים את הקיוביט, שהתחיל במצב $|0\rangle$, בדיוק n פעמים בזווית θ . לפי ההגדרה $\theta = \frac{\pi}{2n}$ ולכן

$$R_\theta^n = R_{n\theta} = R_{\pi/2}, \quad R_{\pi/2} |0\rangle = |1\rangle,$$

כלומר, בסוף התהליך הקיוביט יהיה במצב $|1\rangle$ בהסתברות 1.

לעומת זאת, כאשר יש פצצה (ובתנאי שלא התפוצצנו לאורך הדרך), בכל סבב המדידה בתוך הקופסה היא $|0\rangle$ והמצב קורס ל- $|0\rangle$. לכן, לאחר n סבבים של "סיבוב זעיר + מדידה", המצב הסופי — בהינתן ששרדנו — הוא שוב $|0\rangle$. מכאן, שהמדידה בסיום מכריעה בוודאות אם יש או אין פצצה.

חסם על הסתברות הפעלת הפצצה

נותר לחשב את הסתברות הפעלת הפצצה לאורך התהליך. מאחר שאנו מבצעים n סבבים, ובכל סבב ההסתברות לפיצוץ חסומה על-ידי

$$\Pr(\text{פיצוץ בשלב יחיד}) = \sin^2 \theta \leq \theta^2 \leq \frac{\pi^2}{4n^2},$$

נקבל, באמצעות חסם האיחוד, כי ההסתברות הכוללת לפיצוץ לאורך כל התהליך חסומה על-ידי

$$\Pr(\text{פיצוץ במהלך התהליך}) \leq n \cdot \frac{\pi^2}{4n^2} = \frac{\pi^2}{4n}.$$