

מבחן - מועד א - פתרון

תאריך: 28/01/2026

סגל הקורס: גיל כהן, יואב גלצור, מיה שלינגר

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- השימוש בחומר עזר אסור פרט לדף $A4$ דו-צדדי או שני דפי $A4$ חד-צדדיים. לקבוצות B, C ואחרים הזכאים לדף מורחב מותר השימוש בשני דפי $A4$ דו-צדדיים או ארבעה דפי $A4$ חד-צדדיים. השימוש במחשבון אסור.
- את התשובות יש לרשום רק על טופס הבחינה. מחברת הבחינה משמשת כטיוטה ולא תיבדק.
- יש לרשום מספר ת.ז. ומספר מחברת בראש כל אחד מהדפים בטופס.
- המבחן מורכב מ-6 שאלות ושאלת בונוס נוספת לקבוצות B, C . יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות, לבחירתכם, ולכתוב "לא לבדיקה" כתשובה לשאלה שבחרתם שלא לענות עליה. שווי כל שאלה 20 נקודות. במידה ועניתם על כל 6 השאלות, יבדקו 5 שאלות כלשהן (לאו דווקא הראשונות או אלו עם הניקוד הגבוה ביותר), אזי בבקשה המנעו מלעשות כך.
- אלא אם כן נכתב אחרת, יש לתת נימוק קצר לתשובתכם עבור כל שאלה במסגרת המתאימה. במקרים בהם אתם מתבקשים לכתוב הוכחה, יש לכתוב הוכחה מלאה ופורמלית.
- יש לכתוב את כל התשובות במקום המוקצב ובכתב קריא. תשובות ובהן חריגות לא זניחות מהמקום המוקצב, או תשובות הכתובות בכתב קטן באופן קיצוני או לא ברור לא ייקראו ולא יקבלו ניקוד, או שיקבלו ניקוד חלקי בלבד. תשובות שדורשות מאמצים רבים להבנתן גם כן עלולות לגרור הורדת ציון.
- לכן, מומלץ בחום לפתור ראשית במחברת ואז לרשום פתרון מסודר במסגרת. ישנן זוג מסגרות נוספות למקרה הצורך בסוף הטופס.
- ניתן לרשום "אינני יודע/ת" כתשובה לשאלה או סעיף שלה ולקבל 20% מהניקוד. במקרה זה אין להוסיף שום הסבר.
- בתשובות מותר להשאיר סימונים שנלמדו עבור ספירות בסיסיות (עצרת, $S(n, k)$, מקדם בינומי וכדומה), מספרי קטלן (C_n), דוור שיכור (D_n), וסימונים נוספים שראינו בהרצאה.
- אלא אם כן נאמר אחרת, מותר להשתמש בכל טענה מההרצאות או התרגולים ללא הוכחה, ובלבד שהיא מצוטטת כראוי.
- בשאלה עם מספר סעיפים, ניתן להשתמש בתשובה מהסעיף הקודם גם אם לא פתרתם אותו. לדוגמה, התשובה של סעיף 2 יכולה להיות התשובה של סעיף 1, בחזקת 3.

בהצלחה!

שאלה 1 (20 נקודות) בשאלה זו נחשב את מספר העצים על קבוצת הצמתים $[n]$ להם בדיוק 3 עלים **ללא שימוש** במשפטים על עצים פורשים שלמדנו בהרצאות.

א. (7 נק') יהי עץ כלשהו עם בדיוק 3 עלים. עבור כל מספר טבעי $k \geq 0$, רשמו את כמות הצמתים בעץ להם דרגה k . לדוגמה: ישנם 0 צמתים מדרגה 0 (כי הגרף קשיר) ו-3 צמתים מדרגה 1 כי יש שלושה עלים. התשובה יכולה להיות תלויה במספר הצמתים n . אין צורך לנמק.

עבור $k = 0$ ישנם 0 צמתים
 עבור $k = 1$ ישנם 3 צמתים
 עבור $k = 2$ ישנם $n - 4$ צמתים
 עבור $k = 3$ ישנם 1 צמתים
 עבור $k \geq 4$ ישנם 0 צמתים

ב. (13 נק') כמה עצים עם בדיוק שלושה עלים מעל קבוצת הצמתים $\{1, \dots, n\}$ קיימים?

תשובה: כל עץ שכזה מכיל "צומת אמצעי" ושלושה עלים ויש לו צורה של האות Y (זה כבר לא נכון כשמספר העלים גדול מ-3).
 יש n אפשרויות לבחור את הצומת האמצעי ו $\binom{n-1}{3}$ לבחירת העלים (אין חשיבות לסדר ולא בוחרים עם חזרות).
 על כל אופציה כזו, נסדר את $n - 4$ שאר הצמתים בתמורה ($(n - 4)!$ אפשרויות) ונבחר אורכים x, y, z של התמורה, כאשר החלק הראשון (x האיברים הראשונים) יהיו המסלול מהעלה הראשון לצומת האמצעי, וכו'. מספר האפשרויות לבחירת האורכים הוא מספר הפתרונות ל

$$\begin{aligned} x + y + z &= n - 4 \\ x, y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

כלומר $S(4, n - 4) = \binom{n-2}{2}$. סה"כ יוצא

$$n \cdot \binom{n-1}{3} \cdot (n-4)! \cdot \binom{n-2}{2} = n! \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{12}$$

שאלה 2 (20 נקודות) יהי n טבעי. כמה גרפים מעל קבוצת הצמתים $[n]$ קיימים בהם אין צומת מבודד? ניתן להשאיר סימן סכימה בתשובה הסופית.

נסמן ב A_i את קבוצת הגרפים בהם הצומת i מבודד. אנחנו מחפשים את $|\bigcap_{i=1}^n A_i^c|$. נשתמש בעיקרון ההכלה והדחה. נשים לב כי עבור כל תת קבוצה S של הצמתים, מספר הגרפים בהם הצמתים S מבודדים, הוא כמספר הגרפים מעל קבוצת הצמתים $S \setminus \{1, \dots, n\}$ ולכן שווה ל $2^{\binom{n-|S|}{2}}$. מכיון שאנחנו במקרה הסימטרי, מעקרון ההכלה והדחה התשובה הסופית היא

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 2^{\binom{n-k}{2}}$$

שאלה 3 (20 נקודות) יהי $n \geq 2$. בשאלה זו נמצא, באמצעות פונקציות יוצרות, ביטוי סגור לסכום

$$\sum_{i=1}^n (n-i) \cdot i$$

א. (5 נק') הסבירו כיצד ניתן לקבל את $A(x)$, הפונקציה היוצרת של הסדרה $a_n = n$, מתוך הפונקציה היוצרת $\frac{1}{1-x}$, ומצאו ביטוי מפורש ל $A(x)$:

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

ב. (5 נק') נמקו מדוע $A(x)^2$ יוצרת את הסדרה $b_n = \sum_{i=1}^n (n-i) \cdot i$.

לפי הגדרת קונבולוציה

ג. (5 נק') תהי $B(x) = A(x)^2$ הפונקציה היוצרת את הסדרה b_n . רשמו את $B(x)$ ורשמו ביטוי סגור (ללא סכימה) לאיבר הכללי b_n .

$$B(x) = \frac{x^2}{(1-x)^4} \rightarrow b_n = \binom{n+1}{3}$$

$$\frac{1}{(1-x)^r}$$

יוצרת את הסדרה $\binom{n+r-1}{r-1}$. במקרה שלנו $\frac{1}{(1-x)^4}$ יוצרת את הסדרה $\binom{n+3}{3}$, המכפלה ב x^2 שקולה ל"הזזה" של הסדרה, ויוצרת את הסדרה $\binom{n+1}{3}$

ד. (5 נק') ודאו באמצעות הוכחה קומבינטורית כי תשובתכם מהסעיף הקודם זהה לביטוי $\sum_{i=1}^n (n-i) \cdot i$.

בוחרים שלושה איברים מבין $\{1, \dots, n+1\}$. מחלקים למקרים לפי האיבר האמצעי $i+1$.

שאלה 4 (20 נקודות) יהי $n \geq 0$. יצירה מוזיקלית היא רצף של n תווים מתוך הקבוצה $\{A, B, C, D, E, F, G\}$. יצירה נקראת עשירה ב- C אם היא מתחילה בתו C , מסתיימת ב- C ועבור כל שני תווים סמוכים, לפחות אחד מהם הוא C . לדוגמה: המחרוזת $CFCCGC$ היא עשירה ב- C והמחרוזת $CADCGC$ איננה.

א. (13 נק') מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה למספר היצירות העשירות ב- C מאורך n , לכל $n \geq 0$ טבעי.

נחלק למקרים לפי התו השני:
 אם הוא C אז החל ממנו זוהי יצירה עשירה ב- C מאורך $n-1$.
 אחרת, ישנם 6 ערכים אפשריים לתו השני, והתו השלישי חייב להיות C וממנו והלאה זוהי יצירה עשירה ב- C מאורך $n-2$.
 סך הכל נקבל $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$.
 שימו לב כי ניתוח זה מניח שיש יצירה עשירה ב- C מאורך $n-2$, ועל כן הוא תקף החל מ- $n=3$.
 כדי לכסות את כל המקרים נצטרך את תנאי ההתחלה: $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1$.

ב. (7 נק') פתרו את נוסחת הנסיגה מהסעיף הקודם בעזרת שיטת הפולינום האופייני.

הפולינום האופייני הוא

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

ולכן הפתרונות הם $x_1 = -2, x_2 = 3$. נציב בנוסחה עבור $n = 1, 2$, שכן היחס הרקורסיבי לא מתקיים לפני.

$$1 = A \cdot (-2)^1 + B \cdot 3^1 = -2A + 3B \quad \text{AND} \quad 1 = A \cdot (-2)^2 + B \cdot 3^2 = 4A + 9B$$

ולכן נקבל

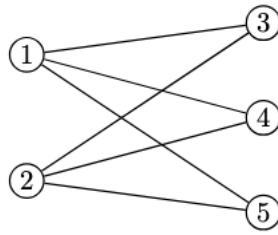
$$3 = 15B \implies B = 1/5 \implies A = -1/5$$

התשובה הסופית היא:

$$\frac{1}{5}(3^n - (-2)^n) \quad \forall n \geq 4$$

שאלה 5 (20 נקודות) בשאלה זו אין קשר בין שני הסעיפים.

א. (10 נק') חשבו בעזרת משפט קירכהוף את מספר העצים הפורשים של הגרף הבא:



המטריצה $M = D - A$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

נסיר את השורה הראשונה העליונה והעמודה השמאלית ביותר:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

נחשב את הדטרמיננטה

$$2 \cdot (12 - 2 - 2) + 1 \cdot (-4) = 16 - 4 = 12$$

ב. (10 נק') יהיו $0 < k \leq n$. כמה עצים מעל הצמתים $[n]$ מקיימים את התכונה הבאה: תת הגרף המכיל את הצמתים $[k]$ והקשתות המחברות ביניהם הוא עץ?

נשים לב שעץ הוא חוקי אם ורק אם הוא מקיים את התכונה הבאה: אם נסיר ממנו את הקשתות המחברות בין הצמתים $\{1, \dots, k\}$ נקבל יער שבו כל צומת $i \in \{1, \dots, k\}$ הוא ברכיב קשירות נפרד. אחרת, יש בו מעגל או שאיננו קשיר.
לכן, ניתן לבנות עץ כזה בעזרת חוק הכפל: ישנם k^{k-2} עצים שונים מעל $\{1, \dots, k\}$. וישנם, כפי שראינו בכיתה, $T_{n,k} = k \cdot n^{n-k-1}$ יערות בהם כל צומת $i \in \{1, \dots, k\}$ נמצא ברכיב קשירות נפרד.
סך הכל נקבל: $k \cdot n^{n-k-1} \cdot k^{k-2}$.

שאלה 6 (20 נקודות)

א. (8 נק') כתבו יחס סימבולי עבור המחלקה הקומבינטורית הבאה: עצים מושרשים מסודרים (כפי שראינו בהרצאה), בהם לכל צומת שאינה עלה יש או שני בנים או ארבעה בנים. פונקציית הגודל היא מספר הצמתים בעץ.

נסמן ב- X את המחלקה הקומבינטורית המכילה צומת יחיד וב- ϵ את המחלקה האטומית הריקה.

$$T = X \cdot (\epsilon + T^2 + T^4)$$

ב. (5 נק') מצאו משוואה שהפונקציה היוצרת של המחלקה הנ"ל מקיימת.

$$T(x) = x(1 + T^2(x) + T^4(x))$$

ג. (7 נק') בעזרת המשפט שלמדנו בהרצאה ובהתבסס על סעיף ב', מצאו קירוב עבור מספר העצים המושרשים המסודרים תחת התנאים הנ"ל בעלי n צמתים.

$$\phi(u) = 1 + u^2 + u^4 \implies \phi'(u) = 2u + 4u^3$$

המשוואה האופיינית היא

$$1 + u^2 + u^4 = u(2u + 4u^3) = 2u^2 + 4u^4 \iff 3s^2 + s - 1 = 0$$

כאשר $s = u^2$. נמצא את s ,

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6} = \frac{\sqrt{13} - 1}{6}$$

ועל כן, $u = \sqrt{\frac{\sqrt{13}-1}{6}}$ נציב ב- $\phi'(u)^n$ ונקבל:

$$\left(2 \cdot \left(\frac{\sqrt{13}-1}{6} \right)^{1/2} + 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{13}-1}{6} \right)^{3/2} \right)^n \approx 2.46^n$$

שאלת בונוס (5 נקודות בונוס לקבוצות B, C) כמה פונקציות מהקבוצה $[k]$ לקבוצה $[n]$ הן חד-חד-ערכיות ומונוטוניות (עולות או יורדות)?

תשובה: $2 \cdot \binom{n}{k}$

מסגרת נוספת למקרה הצורך:

מסגרת נוספת למקרה הצורך: