TEL AVIV אוניברסיטת
UNIVERSITY תל אביב

מתמטיקה בדידה 2 **אביב תשפ"ד**

מבחן ־ מועד ב ־ פתרון

תאריך: 27/09/2024

סגל הקורס: מיכל פלדמן, אמיר רובינשטיין, יותם דביר, יואב גל־צור, תומר מנקט, רז לוטן, איתי תשובה

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- השימוש במחשבון אסור.
- השימוש בחומר עזר אסור פרט לדף $A4$ דו־צדדי או שני דפי $A4$ חד־צדדיים. לקבוצה 28 ואחרים הזכאים לדף מורחב מותר השימוש בשני דפי $A4$ דו־צדדיים או ארבעה דפי $A4$ חד־צדדיים.
- את התשובות יש לרשום רק על טופס הבחינה. מחברת הבחינה משמשת כטיוטה ולא תיבדק.
- יש לרשום מספר ת.ז. ומספר מחברת בראש כל אחד מהדפים בטופס.
- בטופס 7 עמודים, לא כולל עמוד זה, הכוללים 5 שאלות, ושאלת בונוס נוספת לקבוצה 28, ועמוד עם מסגרת נוספת למקרה הצורך.
- ערכן של כל 5 השאלות, להוציא שאלת הבונוס, מסתכם ל־100 נקודות. ערכה של שאלת הבונוס הוא 5 נקודות, כך שסטודנטים מקבוצה 28 יכולים להגיע לציון של 105 נקודות. בכל מקרה, ציון המבחן הסופי יעוגל למטה, במקרה הצורך, ל־100.
- יש לכתוב את כל התשובות במקום המוקצב ובכתב קריא. תשובות ובהן חריגות לא זניחות מהמקום המוקצב, או תשובות הכתובות בכתב קטן באופן קיצוני או לא ברור לא ייקראו ולא יקבלו ניקוד, או שיקבלו ניקוד חלקי בלבד. תשובות שדורשות מאמצים רבים להבנתן גם כן עלולות לגרור הורדת ציון.
- לכן, מומלץ בחום לפתור ראשית במחברת ואז לרשום פתרון מסודר במסגרת.
- ניתן לרשום "אינני יודע/ת" כתשובה לשאלה או סעיף שלה, פרט לשאלת הבונוס, ולקבל 20% מהניקוד. במקרה זה אין להוסיף שום הסבר ו/או לסמן את אחת האפשרויות.
- בתשובות מותר להשאיר סימונים שנלמדו עבור ספירות בסיסיות (עצרת, מקדם בינומי), מספרי פיבונאצ'י, מספרי קטלאן, מספרי בל, מספרי סטרלינג מהסוג השני, דורר שיכור, וסימונים נוספים שראינו בהרצאה.

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות) לכל $n \geq 2$ טבעי, נסמן ב־a_n את מספר הגרפים $G = \langle V, E \rangle$ (הפשוטים ולא מכוונים) שבהם $V = [n]$, ובנוסף, לצמתים n ו־$n{-}1$ אין שכן משותף.

א. (15 נק') השתמשו בעקרון ההכלה וההדחה כדי לקבל נוסחה סגורה לאיבר הכללי a_n ($n \geq 2$ טבעי). ניתן להשאיר סכימה בתשובתכם.

תשובה סופית:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \binom{n-2}{k} \cdot 2^{\binom{n}{2} - 2k}$$

הסבר: יהי $n \geq 2$ טבעי כלשהו, ותהי U קב' כל הגרפים (הפשוטים ולא מכוונים) עם $V = [n]$.
לכל $i \in [n-2]$ נגדיר A_i ־ קבוצת הגרפים ב־U שבהם צומת i הוא שכן משותף של צמתים $n-1$ ו־n.
אנו רוצים לחשב את

$$a_n = \left| \bigcap_{i=1}^{n-2} \overline{A_i} \right| = |U| - \left| \bigcup_{i=1}^{n-2} A_i \right|.$$

נשים לב שאם $S \subseteq [n-2]$ מקיימת $|S| = k$ אז

$$\left| \bigcap_{j \in S} A_j \right| = 2^{\binom{n}{2} - 2k} = 2^{\binom{n}{2} - 2|S|}$$

($2k$ הקשתות המחברות את איברי S עם צומת $n-1$ ועם צומת n חייבות להופיע, ונותר להכריע עבור שאר $\binom{n}{2} - 2k$ הקשתות הפוטנציאליות אם הן מופיעות או לא ־ 2 אפשרויות לכל אחת). בפרט מדובר במקרה הסימטרי, ולפי נוסחת ההכלה וההדחה נקבל

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \binom{n-2}{k} \left| \bigcap_{j \in [k]} A_j \right| \tag{1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \binom{n-2}{k} \cdot 2^{\binom{n}{2} - 2k}. \tag{2}$$

ב. (10 נק') חשבו את a_{50}. יש לתת תשובה מספרית ללא שימוש בסימן סכימה.

תשובה סופית:

$$a_{50} = 2^{\binom{50}{2}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{48}$$

הסבר: ע"י הצבת $n = 50$ בנוסחה מסעיף א' ושימוש בנוסחת הבינום:

$$\begin{aligned}
a_{50} &= \sum_{k=0}^{48} (-1)^k \binom{48}{k} \cdot 2^{\binom{50}{2}-2k} && (3)\\
&= 2^{\binom{50}{2}} \cdot \sum_{k=0}^{48} (-1)^k \binom{48}{k} \cdot 2^{-2k} && (4)\\
&= 2^{\binom{50}{2}} \cdot \sum_{k=0}^{48} \binom{48}{k} (-1)^k \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k && (5)\\
&= 2^{\binom{50}{2}} \cdot \sum_{k=0}^{48} \binom{48}{k} \left(-\frac{1}{4}\right)^k \cdot 1^{48-k} && (6)\\
&= 2^{\binom{50}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{4} + 1\right)^{48} && (7)\\
&= 2^{\binom{50}{2}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{48} && (8)
\end{aligned}$$

דרך אחרת: ראשית נבנה גרף שרירותי עם $V = [48]$ - יש $2^{\binom{48}{2}}$ אפשרויות. לאחר מכן נוסיף זוג צמתים 49 ו־50. כעת לכל אחד מצמתים 1 עד 48, יש 3 אפשרויות להתחבר אליהם: או שמחובר רק ל־49, או רק ל־50, או לאף אחד מהם (אך לא לשניהם, אחרת הוא יהיה שכן משותף). בנוסף יש לבחור אם 49 ו־50 מחוברים בקשת או לא. בסה"כ מעיקרון הכפל נקבל שמס' הגרפים המבוקש הוא

$$a_{50} = 2^{\binom{48}{2}} \cdot 3^{48} \cdot 2.$$

שאלה 2 (25 נקודות) נאמר שגרף הוא **מוקלק** אם כל רכיב קשירות בו הוא קליקה.

א. (10 נק') יהי G גרף מוקלק בו הדרגה המקסימלית של קדקוד היא $D > 1$. מצאו את מספר הצביעה של G (כפונקציה של D). יש להוכיח את נכונות התשובה.

תזכורת: מספר הצביעה של גרף הוא המספר המינימלי של צבעים שצריך כדי לצבוע את קדקודי הגרף כך שלא קיימים שני קדקודים באותו צבע המחוברים בקשת.

מספר הצביעה: $D+1$

הוכחה: תחילה, לא ניתן לצבוע ב־D צבעים ומטה. אכן, יש קדקוד בעל דרגה D, וצריך לצבוע אותו. ישארו לכל היותר $D-1$ צבעים עבור D שכניו, ולכן לפי שובך היונים נקבל שיש לו זוג שכנים בעלי אותו הצבע. הם באותו רכיב קשירות ולכן, לפי ההנחה, חלק מקליקה. לכן הם מחוברים בקשת, ומכאן שהצביעה לא חוקית.

מצד שני, ניתן לצבוע ב־$D+1$ צבעים. פשוט נצבע כל קליקה בנפרד, ולכל קדקוד ניתן צבע אחר. זה אפשרי כי אין רכיב קשירות שיש בו יותר מ־$D+1$ קדקודים, שכן רכיב כזה היה קליקה ולכן היה קדקוד בעל דרגה גדולה מ־D, בסתירה למקסימליות הדרגה בהנחה.

ב. (10 נק') נסמן ב a_n את מספר הגרפים המוקלקים שקבוצת קדקודיהם $[n] = \{1, \ldots, n\}$. מצאו נוסחה ל־a_n ללא נסיגה (מותר להשתמש סכום מוכלל).

נוסחה סגורה:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$$

ג. (5 נק') איזו מנוסחאות הנסיגה הבאות (בתוספת תנאי התחלה מתאימים) מתאימה ל־a_n מהסעיף הקודם? הקיפו בעיגול, אין צורך בהסבר.

I. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot a_{n-1}$

II. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k} \cdot a_{n-1}$

III. $\boxed{a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot a_{n-k}}$

(**הסבר:** מספרי בל)

IV. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k} \cdot a_{n-k}$

V. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \cdot a_{n-1}$

VI. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot a_{n-1}$

VII. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \cdot a_{n-k}$

VIII. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot a_{n-k}$

שאלה 3 (15 נקודות) יהי n מספר טבעי חיובי. נאמר שפונקציה $f \in [n] \to [3n]$ היא **מרווחת** אם לכל $1 \le i < j \le n$ מתקיים $f(j) - f(i) > 1$. כמה פונקציות מרווחות קיימות? (הביעו באמצעות n). תנו תשובה ללא סימן סכימה והסבירו בקצרה.

תשובה סופית:

$$\binom{3n-n+1}{n} = \binom{2n+1}{n}$$

הסבר: נשים לב שכל פונקציה מרווחת היא בפרט מונוטונית עולה (ממש), ויש זיווג מקבוצת הפונקציות המרווחות לקב' המחרוזות הבינאריות באורך $3n$ שבהן בדיוק n 1־ים ואין זוג 1־ים רצופים. ספירת המחרוזות הללו: נמקם תחילה $2n$ אפסים ונחשוב עליהם כעל מחיצות בין $2n+1$ תאים, מתוכם יש לבחור n תאים שבהם נכניס 1 (בחירה ללא חשיבות לסדר ובלי חזרות).

שאלה 4 (15 נקודות) יהי n מספר טבעי חיובי. כמה פונקציות $f \in [2n] \to [2n]$ מקיימות $f \circ f = \mathrm{Id}$ (כאשר Id היא פונקציית הזהות על הקבוצה $[2n]$)? ניתן להשאיר סכימה בתשובתכם. הסבירו בקצרה.

תשובה סופית:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k! \cdot 2^k \cdot (2n-2k)!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \cdot \frac{(2k)!}{k! \cdot 2^k}.$$

הסבר: מדובר בדיוק בפונקציות המורכבות מחילופים ונקודות שבת בלבד. מספר החילופים k מקיים $0 \le k \le n$, ומס' הפונקציות הנ"ל שבהן בדיוק k חילופים הוא

$$\binom{2n}{2k} \cdot \frac{(2k)!}{k! \cdot 2^k}$$

(בחירת $2k$ האיברים לחילופים, היתר נקודות שבת. לכל בחירה, נחלק אותם ל־k זוגות ע"י סידורם בשורה ־ $(2k)!$ דרכים, ונחלק ב־$k! \cdot 2^k$ כי סדר הזוגות והסדר הפנימי בתוך כל זוג לא חשובים). התשובה הסופית מתקבלת מעיקרון החיבור.

שאלה 5 (20 נקודות) לכל n טבעי, נסמן ב־b_n את מספר המחרוזות באורך n מהתווים $\{A, B, C, D, 1, 2, 3\}$ שאין בהן זוג ספרות סמוכות. למשל, המחרוזת $A1B3$ היא מחרוזת חוקית באורך 4, אך המחרוזות $A13B$ ו־$A131$ אינן מחרוזות חוקיות באורך 4.

א. (12 נק') מצאו נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית מסדר לכל היותר שתיים ותנאי התחלה עבור b_n. הסבירו בקצרה.

תשובה סופית:

$$b_n = 4b_{n-1} + 12b_{n-2} \quad (\forall n \geq 2)$$

עם תנאי התחלה $b_0 = 1, \ b_1 = 7$.

הסבר: תנאי ההתחלה הם $b_0 = 1$, $b_1 = 7$. עבור $n \geq 2$, נפריד למקרים לפי התו הראשון: אם הוא אות (4 אפשרויות) אז ניתן להמשיך בכל מחרוזות חוקית באורך $n-1$ ־ בסה"כ $4b_{n-1}$ מחרוזות חוקיות. אם הוא מתחיל בספרה (3 אפשרויות) ־ אז התו השני חייב להיות אות (4 אפשרויות) ואז ניתן להמשיך עם כל מחרוזת חוקית באורך $n-2$ ־ בסה"כ $3 \cdot 4 \cdot b_{n-2} = 12b_{n-2}$ מחרוזות. מעיקרון החיבור נקבל

$$b_n = 4b_{n-1} + 12b_{n-2}.$$

ב. (8 נק') מצאו נוסחה סגורה לאיבר הכללי של b_n.

תשובה סופית:

$$b_n = \frac{9 \cdot 6^n - (-2)^n}{8}$$

הסבר: נפתור בשיטת הפולינום האופייני: הפולינום האופייני הוא

$$p(x) = x^2 - 4x - 12 = (x-6)(x+2)$$

ושורשיו הם $x_1 = 6$, $x_2 = -2$. לכן הפתרון הכללי הוא מהצורה

$$b_n = A \cdot 6^n + B \cdot (-2)^n.$$

נציב את תנאי ההתחלה ונפתור את מערכת המשוואות למציאת A, B:

$$\begin{cases} b_0 = A + B \\ b_1 = 6A - 2B \end{cases} \implies \begin{cases} 1 = A + B \\ 7 = 6A - 2B \end{cases}$$

הפתרון הוא $(A, B) = \left(\frac{9}{8}, -\frac{1}{8}\right)$ ולכן התשובה היא

$$b_n = \frac{9}{8} \cdot 6^n - \frac{1}{8} \cdot (-2)^n = \frac{9 \cdot 6^n - (-2)^n}{8}$$

שאלה 6 (5 נקודות בונוס לקבוצה 28) בפסטיבל 3 דוכנים: דוכן גלידה, דוכן פיצה ודוכן פלאפל. בכמה דרכים יכולים n אנשים (רעבים) המשתתפים בפסטיבל להסתדר בתורים לדוכנים (כל אדם בתור אחד בדיוק), כך שבתור לגלידה יהיו לפחות k אנשים? (ניתן להניח כי $k < n$). הקיפו בעיגול את התשובה הנכונה, אין צורך בהסבר.

I. $\binom{n-k+2}{2}$

II. $\binom{n-k+1}{2}$

III. $\binom{n+k+2}{2}$

IV. $\binom{n+k+1}{2}$

V. $\boxed{n! \cdot \binom{n-k+2}{2}}$

VI. $n! \cdot \binom{n-k+1}{2}$

VII. $n! \cdot \binom{n+k+2}{2}$

VIII. $n! \cdot \binom{n+k+1}{2}$

הסבר מורחב: תשובה סופית:

$$n! \cdot \binom{n-k+2}{2}$$

תחילה נסדר את המשתתפים בשורה - $n!$ דרכים. כעת נמקם 2 חוצצים בין האנשים כך שהחלק הראשון יהיה התור לגלידה, השני התור לפיצה והשלישי התור לפלאפל (מסודרים עפ"י סידורים בשורה). מכיוון שהתור לגלידה חייב להכיל לפחות k אנשים, יש רק $(n+1)-k$ מקומות אפשריים לשים בהם חוצצים. בחירת המקומות עבורם היא בחירה של 2 מתוך $n-k+1$, עם חזרות ובלי חשיבות לסדר, לכן בסה"כ

$$n! \cdot S(n-k+1, 2) = n! \cdot \binom{(n-k+1)+2-1}{2} = n! \cdot \binom{n-k+2}{2}.$$

מסגרת נוספת למקרה הצורך: