TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל אביב

מתמטיקה בדידה 2 **חורף תשפ"ה**

מתמטיקה בדידה 2 - מבחן מסכם מועד א

תאריך: 20/2/2025

סגל הקורס: פרופסור גיל כהן, יואב גל־צור, איתי כהן.

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- ניתן להיעזר בדף נוסחאות אחד (כתוב משני צדדיו). השימוש במחשבון אסור.
- את התשובות יש לרשום רק על טופס הבחינה. מחברת הבחינה משמשת כטיוטה ולא תיבדק.
- יש לרשום מספר ת.ז. ומספר מחברת בראש כל אחד מהדפים בטופס.
- המבחן מורכב מ־6 שאלות. יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות, לבחירתכם, ולכתוב "לא לבדיקה" כתשובה לשאלה שבחרתם שלא לענות עליה. שווי כל שאלה 20 נקודות. במידה ועניתם על כל 6 השאלות, יבדקו 5 שאלות כלשהן (לאו דווקא הראשונות או אלו עם הניקוד הגבוה ביותר), אז בבקשה המנעו מלעשות כך.
- אלא אם כן נכתב אחרת, יש לתת נימוק קצר לתשובתכם עבור כל שאלה במסגרת המתאימה. במקרים בהם אתם מתבקשים לכתוב הוכחה, יש לכתוב הוכחה מלאה ופורמלית.
  - יש לכתוב את כל התשובות במקום המוקצב ובכתב קריא. תשובות ובהן חריגות לא זניחות מהמקום המוקצב, או תשובות הכתובות בכתב קטן באופן קיצוני או לא ברור לא ייקראו ולא יקבלו ניקוד, או שיקבלו ניקוד חלקי בלבד. תשובות שדורשות מאמצים רבים להבנתן גם כן עלולות לגרור הורדת ציון.
  - לכן, מומלץ בחום לפתור ראשית במחברת ואז לרשום פתרון מסודר במסגרת. כאמור, ישנן זוג מסגרות נוספות למקרה הצורך בסוף הטופס.
- ניתן לרשום "אינני יודע/ת" כתשובה לשאלה או סעיף שלה ולקבל 20% מהניקוד. במקרה זה אין להוסיף שום הסבר.

בהצלחה!

שאלה 1 (20 נקודות) יש לענות על שני הסעיפים הבאים. אין קשר בין הסעיפים.

א. (10 נקודות) יהיו $0 < k \le n$ מספרים טבעיים. כמה זוגות סדורים של קבוצות $A, B \subseteq [n]$ ישנם כך שגודל הקבוצות $|A| = |B| = k$ ומתקיים
$$|A \cap B| = \frac{|A \cup B|}{2}$$

ראשית נשים לב כי מתקיים,
$$|A \cap B| = \frac{1}{2}|A \cup B| = \frac{1}{2}(|A| + |B| - |A \cap B|) = k - \frac{1}{2}|A \cap B|$$
(זהו בעצם מקרה פרטי מאוד של עיקרון ההכלה־הדחה). כלומר, $|A \cap B| = \frac{2k}{3}$. ולכן, $|A \setminus B| = |B \setminus A| = \frac{k}{3}$.
אם $k \not\equiv 0 \mod 3$, אזי לא קיימות קבוצות A, B כנ"ל.
אחרת, נשתמש בחוק הכפל ונבחר $\frac{2k}{3}$ איברים לחיתוך מתוך n. אחר כך $\frac{k}{3}$ איברים ל־ $A \setminus B$ מבין הנותרים ולבסוף $\frac{k}{3}$ איברים ל־ $B \setminus A$ מהנותרים. כלומר,
$$\binom{n}{2k/3} \cdot \binom{n - 2k/3}{k/3} \cdot \binom{n-k}{k/3}$$

ב. (10 נקודות) יהא $T = (V, E)$ עץ על n צמתים. עבור $v \in V$ נסמן ב־ d_v את הדרגה של הצומת v ב T.
נמקו בקצרה מדוע מספר הדרכים להוסיף קשת ל־ T כך שהגרף המתקבל יכיל משולש הוא
$$1 - n + \frac{1}{2}\sum_{v \in V} d_v^2$$

עבור קודקוד מסוים $u \in V$ ניתן לחברו לכל שכן של שכן ולקבל משולש. לכן מספר הדרכים לחבר צלע ל־ u ולקבל משולש: $\sum_{v \in V, (v,u) \in E}(d_v - 1)$. כאשר נסכום על כל הקודקודים אנחנו נספור כל צלע פעמיים (אחת עבור כל קודקוד שלה), ולכן מספר הצלעות שניתן להוסיף הן

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{u \in V}\sum_{v \in V, (v,u) \in E}(d_v - 1) &= \frac{1}{2}\sum_{u \in V}\sum_{v \in V, (v,u) \in E} d_v - \frac{1}{2}\sum_{u \in V}\sum_{v \in V, (v,u) \in E} 1 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{v \in V} d_v \left(\sum_{u \in V, (v,u) \in E} 1\right) - \frac{1}{2}\sum_{u \in V} d_v \\
&= \frac{1}{2}\sum_{v \in V} d_v^2 - (n-1)
\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נובע ממשפט לחיצות הידיים.

גישות נוספות להוכחה:

1. להוכיח באינדוקציה על מספר על הקודקודים, כאשר בצעד האינדוקציה אנו מסירים עלה ואת הקשת היוצאת ממנו ומכילים את הנחת האינדוקציה על הגרף המצומצם.
2. עבור כל קודקוד $v \in V$ יש $\binom{d_v}{2}$ דרכים ליצור משולש על ידי חיבור שני שכנים של v.

$$\sum_{v \in V}\binom{d_v}{2} = \frac{1}{2}\sum_{v \in V} d_v^2 - \frac{1}{2}\sum_{v \in V} d_v = \frac{1}{2}\sum_{v \in V} d_v^2 - (n-1)$$

שאלה 2 (20 נקודות)

א. (10 נקודות) הוכיחו כי לכל $n \geq 2$ קבוצות $A_1, \dots, A_n$ מתקיים

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| \geq \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |A_i \cap A_j|$$

נסתכל על איבר כלשהו $x \in A_1 \cup \dots \cup A_n$. הוא תורם 1 לצד שמאל של אי השוויון.
נניח כי x שייך ל־ k קבוצות שונות.
אם $k = 1$, הוא תורם 1 גם לצד ימין של אי השוויון. אחרת, הוא תורם $k - \binom{k}{2}$ לצד ימין: $+1$ לכל קבוצה בה הוא נמצא, ו־ -1 לכל זוג קבוצות (שימו לב שבגלל שהאינדקסים מסודרים, סופרים כל זוג פעם אחת).
נותר להראות כי לכל $k \geq 2$, $1 \geq k - \binom{k}{2}$. אם נעביר אגפים נקבל את הביטוי השקול $0 \geq (1 - k)(2 - k)$, המתקיים לכל $k \geq 2$.

גישות נוספות:
1. הוכחה באינדוקציה על n.
2. לשים לב שצד ימין של אי השוויון הוא למעשה שני המחוברים הראשונים בעקרון ההכלה וההדחה. אם ככה, מספיק להראות שה"זנב" של עקרון ההכלה וההחדה (חיתוכים מגודל שלוש ומעלה), הוא אי שלילי.

ב. (10 נקודות) מצאו תנאי הכרחי ומספיק על הקבוצות $A_1, \dots, A_n$ כך שיתקיים שוויון בסעיף א.

תנאי מספיק והכרחי: חיתוך של כל שלוש קבוצות הוא ריק.
הנכונות נובעת ישירות מההוכחה של הסעיף הקודם:
אם איבר שייך רק לקבוצה אחת, אז הוא תורם 1 לכל צד באי השוויון.
אם הוא שייך לשתי קבוצות בדיוק, אז הוא תורם $k - \binom{k}{2} = 2 - 1 = 1$ לצד ימין.
בכל מקרה אחר, $k - \binom{k}{2} < 1$, ולכן התרומה לצד שמאל תהיה גדולה ממש מהתרומה לצד ימין.

שאלה 3 (20 נקודות) יהא n מספר טבעי. קבוצה $A \subseteq [n]$ תקרא "מינימאלית" אם מתקיים $|A| = \min A$.

א. (5 נקודות) יהא $k \in [n]$. כמה קבוצות מינימאליות $A \subseteq [n]$ ישנן מגודל k?

כדי שקבוצה $A \subseteq [n]$ תהיה מינימאלית מגודל k חייבים ש k יהיה חלק מהקבוצה. חוץ ממנו, יש להוסיף עוד $k-1$ איברים מבין האיברים שגדולים מ k. ישנם בדיוק $n-k$ איברים כאלה ולכן מספר הקבוצות המינימליות בגודל k הוא
$$\binom{n-k}{k-1}.$$

ב. (5 נקודות) כמה קבוצות מינימאליות ישנן עבור $n = 1, 2, 3, 4, 5$? אין צורך בנימוק.

נסמן ב A_n את כמות הקבוצות המינימליות המוכלות ב $[n]$. אז
$A_1 = A_2 = 1$,
$A_3 = 2$,
$A_4 = 3$,
$A_5 = 5$.

ג. (10 נקודות) כמה קבוצות מינימאליות $A \subseteq [n]$ ישנן? תשובה עם סכימה תזכה בניקוד חלקי.

ראשית, ברור מסעיף א כי
$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1}.$$
נשים לב שהסדרה שמצאנו בסעיף ב היא סדרת פיבונאצ'י. נוכיח שאכן מתקיים יחס הרקורסיה
$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}.$$
מזהות פסקל, אנחנו יודעים שעבור כל m ו i מתקיים $\binom{m-1}{i} + \binom{m-1}{i-1} = \binom{m}{i}$. לכן
$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k-1}{k-1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k-1}{k-2}.$$
את הסכום הראשון ניתן לכתוב באופן הבא
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-k-1}{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{(n-1)-k}{k-1} = A_{n-1}$$
ואת הסכום השני באופן הבא
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-k-1}{k-2} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-2-(k-1)}{(k-1)-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-2-k}{k-1} = A_{n-2},$$
כאשר השתמשנו בעובדה שהנסכמים שמתאימים ל $k = 0, n-1, n$ שווים ל 0 עבור $n \geq 3$. לכן, $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ ויחד עם תנאי ההתחלה מסעיף ב נקבל שאלה הם בדיוק מספרי פיבונאצ'י. $A_n = F_n$.

נעיר כי קיים פתרון ישיר שלא עובר דרך סכימה, בו מפתחים את כלל הנסיגה על ידי הפרדה למקרים, לפי האם האיבר n נמצא בקבוצה.

שאלה 4 (20 נקודות) בשאלה זו נגדיר וריאציה על מספרי ראמזי שראינו בכיתה. עבור מספרים טבעיים $s,t \geq 2$ נסמן ב־ $\widetilde{R}(s,t)$ את המספר הטבעי הקטן ביותר המקיים שכל צביעה של קשתות הגרף השלם על מספר זה של צמתים בהכרח תשרה לפחות **שני גרפים** שלמים על s צמתים שכל הקשתות המחברות ביניהם כחולות או **שני גרפים** שלמים על t צמתים שכל הקשתות המחברות ביניהם אדומות, **או לפחות גרף אחד מכל סוג**. נציין כי מותר לגרפים הללו לחלוק צמתים וקשתות.

א. (10 נקודות) חשבו את $\widetilde{R}(2,t)$ עבור $t \geq 2$.

טענה: $\widetilde{R}(2,t) = t+1$.

ראשית נוכיח כי $\widetilde{R}(2,t) \leq t+1$. נבחין כי זה נובע ישירות מסעיף ב (וזה פתרון קביל שכן פתרון סעיף ב שלנו לא מסתמך על סעיף א) ומכך שהוכחנו בכיתה כי $R(2,t) = t$, אבל, בשביל הספורט, נוכיח זאת באופן ישיר.

נתבונן בצביעה כלשהי של קשתות הגרף השלם על $t+1$ צמתים בכחול ובאדום, ונראה כי אם אין שתי קשתות כחולות אז בהכרח יש או קשת כחולה אחת ו־ K_t אדום, או שני K_t אדומים שונים. נניח ויש קשת כחולה אחת בדיוק. נתבונן בתת הגרף השלם המתקבל על ידי הסרת אחד מצמתי הקצה של קשת זו. זהו תת־גרף על t צמתים שכל קשתותיו צבועות באדום, כנדרש. כעת, במקרה ואף קשת לא צבועה בכחול, קיימים $t+1 > 2$ תתי־גרפים שלמים שונים הצבועים באדום ־ אחד לכל בחירה של צומת שנבחר להסיר.

בכדי להשלים את הוכחת הטענה, נראה כי $\widetilde{R}(2,t) > t$. לצורך כך נתבונן בצביעה של כל קשתות הגרף השלם על t צבעים באדום, פרט לקשת אחת שנצבע בכחול. במקרה זה אין כמובן K_t אדום ואין שתי קשתות כחולות.

ב. (10 נקודות) הוכיחו כי לכל $s,t \geq 2$ מתקיים $\widetilde{R}(s,t) \leq R(s,t) + 1$.

תהא צביעה של הגרף השלם על $R(s,t)+1$ צמתים. מהגדרת $R(s,t)$ קיים תת־גרף שלם כחול על s צמתים או תת־גרף שלם אדום על t צמתים. יהא v צומת בתת־גרף זה. נביט כעת בתת הגרף השלם המתקבל על ידי הסרת הצומת v. זהו גרף שלם על $R(s,t)$ צמתים ולכן, שוב מהגדרה, קיים תת־גרף שלם כחול על s צמתים או תת־גרף שלם אדום על t צמתים. תת־גרף זה לא יכול להיות זהה לראשון שמצאנו שכן הוא לא מכיל את v.

שאלה 5 (20 נקודות)

א. (5 נקודות) חשבו בעזרת שיקולים קומבינטוריים בסיסיים (עיקרון החיבור, עיקרון הכפל וכדומה) את מספר העצים הפורשים של הגרף המתקבל על ידי הסרת קשת אחת מהקליק על 4 צמתים.

נסמן את צמתי הגרף על ידי המספרים $1,2,3,4$ ונניח בלי הגבלת הכלליות שהקשת $\{2,4\}$ הוסרה מהקליק. נספור את מספר העצים הפורשים תוך הפרדה למקרים לפי האם העץ מכיל את הקשת $\{1,3\}$. כל עץ פורש שלא מכיל קשת זו הוא בעצם עץ פורש של המעגל על ארבעה צמתים, וישנם בדיוק 4 עצים במקרה זה. במקרה השני, אנו חייב להסיר בדיוק קשת אחת מכל אחד מהזוגות $\{\{1,2\},\{2,3\}\},\{\{1,4\},\{3,4\}\}$ שכן אנו רוצים לסיים עם שלוש קשתות ואם לא נבחר קשת מכל זוג, הגרף המתקבל יכיל מעגל. יש לנו $2^2=4$ עצים מהסוג השני, ולכן בסך הכל ישנם 8 עצים פורשים.

ב. (7 נקודות) חשבו תוך שימוש במשפט קירכהוף את מספר העצים הפורשים של הגרף מסעיף א.

עם הסימונים של התשובה של הסעיף הקודם, נתבונן במטריצה הבאה

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

מטריצה זו מכילה על האלכסון את דרגות הצמתים, וכל כניסה מחוץ לאלכסון היא -1 אם קיימת קשת המחברת בין הצמתים המתאימים, ואחרת הכניסה היא 0. ממשפט קירכהוף, מספר העצים הפורשים של הגרף שווה לדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת על ידי הסרה של השורה הראשונה והעמודה הראשונה (או כל בחירה אחרת לצורך העניין). כלומר, עלינו לחשב את הדטרמיננטה של המטריצה

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

וחישוב פשוט (שאתם צריכים להראות) מראה שהתשובה היא 8.

ג. (8 נקודות) עבור $n \geq 5$ טבעי, מהו מספר העצים הפורשים של הגרף המתקבל על ידי הסרת קשת אחת מהקליק על n צמתים? בשאלה זו ניתן אך אין זה חובה להשתמש במשפט קירכהוף.

בכפי לפתור שאלה זו ניתן, אך לא כדאי, להשתמש במשפט קירכהוף, שכן זה לא טריוויאלי לחשב את הדטרמיננטה של המטריצה המתאימה. במקום זאת, נשתמש בעיקרון חזק בקומבינטוריקה ובמתמטיקה בכלל ־ סימטריה.

נתבונן בגרף השלם על n צמתים. עבור קשת e נסמן ב־ t_e את מספר העצים הפורשים של הגרף השלם המכילים את הקשת e. על פי עיקרון המשלים, הביטוי שמעניין אותנו ־ התשובה לשאלה ־ ניתן לכתיבה כ־

$$n^{n-2} - t_e,$$

שכן מספר העצים הפורשים של הגרף השלם, ללא הגבלות, הוא n^{n-2} על פי משפט קיילי. על כן, עלינו לחשב את t_e. לצורך כך נתבונן בקבוצה A המורכבת מכל הזוגות הסדורים מהצורה (T, e) כאשר T הוא עץ פורש של הגרף השלם על n צמתים ו־ e קשת ב־ T. מצד אחד, שוב תוך שימוש במשפט קיילי, ומכך שכל עץ פורש מכיל בדיוק $n-1$ קשתות, מתקיים

$$|A| = (n-1)n^{n-2}$$

מצד שני, מהגדרת t_e מתקיים

$$|A| = \sum_e t_e$$

משיקולי סימטריה, לכל שתי קשתות e, f מתקיים $t_e = t_f$. על כן, מכיוון שיש $\binom{n}{2}$ קשתות בגרף השלם, נקבל ש־

$$(n-1)n^{n-2} = \binom{n}{2} t_e \qquad \Longrightarrow \qquad t_e = 2n^{n-3}.$$

על כן, התשובה לשאלה היא

$$n^{n-2} - 2n^{n-3} = (n-2)n^{n-3}$$

אני רוצה להעיר שרק מעטים (פחות מעשר אחוז) פתרו את השאלה נכונה, ולא בצורה פורמלית ומלאה כמו פתרון בית הספר לעיל. מתוכם רק פתרון אחד עבר דרך משפט קירכהוף. זאת בהחלט השאלה הקשה ביותר במבחן, ולכן אל תרגישו רע אם לא הצלחתם. בכל זאת, ניקוד חלקי ניתן לאלו שבחרו להשתמש במשפט קירכהוף, כתבו את המטריצה הנכונה, אבל נתקעו איפשהו בפיתוח הדטרמיננטה.

שאלה 6 (20 נקודות) יהא $k \geq 0$ מספר טבעי.

א. (6 נקודות) תארו במילים את המחלקה הקומבינטורית $\mathcal{A}$ המתוארת על ידי היחס הסימבולי

$$\mathcal{A} = \mathsf{SEQ}(a) \times (b \times \mathsf{SEQ}(a))^k$$

כאשר a, b הם אטומים.

זו מחלקת כל המילים מעל הא"ב $\{a, b\}$ עם בדיוק k מופעים של b.

ב. (6 נקודות) מהי הפונקציה היוצרת המתאימה?

מהשיטה הסימבולית נקבל מיידית כי

$$A(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

ג. (8 נקודות) חשבו את $[x^n]A(x)$ עבור $n \geq 0$ טבעי תוך שימוש בסעיף ב, והסבירו את המשמעות הקומבינטורית של התשובה שקיבלתם בהתייחס לתשובה שלכם מסעיף א.

נשלוף מקדמים מהפונקציה $A(x)$.

$$[x^n]A(x) = [x^n]x^k \cdot \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = [x^{n-k}](1-x)^{-k-1}$$

ראינו בכיתה ש $[x^m](1+x)^i = \binom{i}{m}$ וגם שעבור כל c ממשי, $[x^m]f(cx) = c^m[x^m]f(x)$. עבור $c = -1, i = -k-1$ ו $m = n-k$, נקבל ש

$$[x^{n-k}](1-x)^{-k-1} = (-1)^{n-k}\binom{-k-1}{n-k} = (-1)^{n-k}\frac{(-k-1)(-k-2)\cdots(-k-1-(n-k)+1)}{(n-k)!}$$

נאסוף את סימני המינוס מכל האיברים במקדם הבינומי ונקבל פקטור $(-1)^{n-k}$ שמבטל את אותו הגורם שנמצא בחוץ. לכן

$$[x^n]A(x) = \frac{(k+1)(k+2)\cdots n}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

המשמעות הקומבינטורית של זה היא שישנן $\binom{n}{k}$ מילים מאורך n מעל הא"ב $\{a, b\}$ עם בדיוק k מופעים של b, כפי שאפשר בקלות לחשב בדרכים אחרות

מסגרת נוספת למקרה הצורך:

מסגרת נוספת שניה למקרה הצורך: