

מבחן - מועד א

תאריך: 24/08/2025

סגל הקורס: מיכל פלדמן, אמיר רובינשטיין, יואב בן שמעון, יואב גל-צור, תומר מנקט, מיה שלינגר, איתי תשובה

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- השימוש במחשבון אסור.
- השימוש בחומר עזר אסור פרט לדף $A4$ דו-צדדי או שני דפי $A4$ חד-צדדיים. לקבוצות B, C ואחרים הזכאים לדף מורחב מותר השימוש בשני דפי $A4$ דו-צדדיים או ארבעה דפי $A4$ חד-צדדיים.
- את התשובות יש לרשום רק על טופס הבחינה. מחברת הבחינה משמשת כטיוטה ולא תיבדק.
- יש לרשום מספר ת.ז. ומספר מחברת בראש כל אחד מהדפים בטופס.
- בטופס 7 עמודים, לא כולל עמוד זה, הכוללים 5 שאלות, ושאלת בנוס נוספת לקבוצות B, C , ועמוד עם מסגרת נוספת למקרה הצורך.
- יש לכתוב את כל התשובות במקום המוקצב ובכתב קריא. תשובות ובהן חריגות לא זניחות מהמקום המוקצב, או תשובות הכתובות בכתב קטן באופן קיצוני או לא ברור לא ייקראו ולא יקבלו ניקוד, או שיקבלו ניקוד חלקי בלבד. תשובות שדורשות מאמצים רבים להבנתן גם כן עלולות לגרור הורדת ציון.
- לכן, מומלץ בחום לפתור ראשית במחברת ואז לרשום פתרון מסודר במסגרת.
- בתשובות מותר להשאיר סימונים שנלמדו עבור ספירות בסיסיות (עצרת, $S(n, k)$, מקדם בינומי וכדומה), מספרי פיבונאצ'י (F_n) , מספרי קטלן (C_n) , מספרי בל (B_n) , מספרי סטירלינג מהסוג השני $(\{n\}_k)$, דוור שיכור (D_n) , וסימונים נוספים שראינו בהרצאה.
- מותר להשתמש בכל טענה מההרצאות ללא הוכחה, ובלבד שהיא מצוטטת כראוי.
- בשאלה עם מספר סעיפים, ניתן להשתמש בתשובה מהסעיף הקודם גם אם לא פתרתם אותו. לדוגמה, התשובה של סעיף 2 יכולה להיות התשובה של סעיף 1, בחזקת 3.
- אין לרשום נימוק בשאלות בהן יש לספק תשובה סופית בלבד.
- בשאלות בחירה מרובה יש לבחור תשובה אחת בלבד.
- בשאלות שאינן שאלות בחירה מרובה ("פתוחות") ניתן לרשום "אינני יודע/ת" כתשובה לשאלה או סעיף שלה, פרט לשאלת הבונוס, ולקבל 20% מהניקוד. במקרה זה אין להוסיף שום הסבר.

בהצלחה!

שאלה 1 (5 נקודות בונוס לקבוצות B, C) בכמה דרכים ניתן להושיב 5 ילדים (שונים זה מזה) בשורה עם 15 כסאות, כך שלא יהיו שני ילדים היושבים על שני כסאות הצמודים זה לזה? רשמו תשובה סופית בלבד. תשובה עם סימן סכימה לא תקבל ניקוד מלא.

תשובה סופית:

שאלה 2 (20 נקודות)
נסמן ב a_n את מספר המחרוזות באורך n מעל $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ שלא מכילות אף אחד מהרצפים $'00', '11', '22'$.
נסמן ב b_n את מספר המחרוזות באורך n מעל $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ שלא מכילות אף אחד מהרצפים $'00', '11', '22'$.
וכן הן לא מתחילות בספרה 0.

א. (7 נק') סמנו את השוויון הנכון מבין השוויונות הבאים:

$$I. a_n = b_{n-1} + 4a_{n-1}$$

$$II. a_n = b_n + 4b_{n-1}$$

$$III. a_n = b_{n-1} + a_{n-1}$$

$$IV. a_n = b_n + b_{n-1}$$

$$V. b_n = a_{n-1} + 4b_{n-1}$$

$$VI. b_n = a_n + 4a_{n-1}$$

$$VII. b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

$$VIII. b_n = a_n + a_{n-1}$$

ב. (6 נק') רשמו ערכים $X, Y \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים: $b_n = Xb_{n-1} + Yb_{n-2}$. אין לנמק.

תשובה סופית:

ג. (7 נק') מצאו נוסחה סגורה עבור a_n . הראו את דרך החישוב.

תשובה:

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי n טבעי חיובי. נתבונן בהילוכים במישור המתחילים בנקודה $(0, 0)$ ומסתיימים בנקודה $(2n, 2n)$, בהם בכל צעד זזים יחידה אחת ימינה או יחידה אחת למעלה, כלומר כל צעד הוא מהצורה

$$(x, y) \mapsto (x, y + 1) \quad \text{או} \quad (x, y) \mapsto (x + 1, y)$$

א. (10 נק') בסעיפים (1)-(2) שלהלן רשמו תשובות סופיות בלבד (אין לנמק). תשובות עם סימן סכימה לא יקבלו ניקוד מלא.

(1) הניחו כי $n = 5$ (כלומר הילוכים מ $-(0, 0)$ ל $-(10, 10)$). כמה הילוכים כנ"ל לא עוברים דרך אף אחת מהנקודות $(5, 3)$ ו $-(5, 7)$?

תשובה סופית:

(2) כעת הניחו כי $n \geq 5$. כמה הילוכים כנ"ל עוברים בנקודה $(n, 6)$ אך לא עוברים בנקודה $-(n, 7)$?

תשובה סופית:

ב. (10 נק') יהי n טבעי וחיובי. הוכיחו את השוויון הבא באמצעות הוכחה קומבינטורית. ציינו בפירוש מה התפקיד של k .

$$\binom{4n}{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{n+k}{k} \cdot \binom{3n-k-1}{n-1}$$

תשובה:

שאלה 4 (20 נקודות) יהי $n \geq 1$ טבעי כלשהו. בשאלה זו אין קשר בין הסעיפים השונים.

- א. (7 נק') עבור קבוצה כלשהי $S \subseteq [n]$, איבר $x \in S$ יקרא "חציון מושלם" אם יש בדיוק אותו מספר איברים ב- S שקטנים ממש מ- x ושגדולים ממש מ- x .
 בכמה תתי קבוצות $S \subseteq [n]$ האיבר $|S| \in S$ הוא "חציון מושלם"? רשמו תשובה סופית בלבד. ניתן להשאיר סימן סכימה בתשובה הסופית.

תשובה סופית:

ב. (5 נק') תהי $A(x)$ הפונקציה היוצרת של הסדרה a_n ותהי b_n סדרה המוגדרת להיות

$$b_n = \begin{cases} a_0 & n = 0 \\ a_n + a_{n-1} & n \geq 1 \wedge n \equiv 0 \pmod{2} \\ a_n - a_{n-1} & n \geq 1 \wedge n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

תהי $B(x)$ הפונקציה היוצרת של הסדרה b_n . סמנו את השוויון הנכון.

$$\begin{array}{ll} B(x) = A(x) - xA(-x). & \text{V} \\ B(x) = A(-x) + xA(-x). & \text{I} \\ B(x) = A(x) + xA(-x). & \text{VI} \\ B(x) = A(x)(1 - xA(x)). & \text{II} \\ B(x) = A(-x) - xA(x). & \text{VII} \\ B(x) = A(x) + x^2A(-x). & \text{III} \\ B(x) = A(-x) + xA(x). & \text{VIII} \\ B(x) = A(x)(1 + x). & \text{IV} \end{array}$$

ג. (8 נק') תהי a_k הסדרה בה האיבר ה- k הוא מספר המולטיסטטים מגודל 5 המכילים מספרים טבעיים (כולל 0) ושכום איבריהן הוא k . מהי הפונקציה היוצרת של a_k ? תזכורת: מולטיסט הוא אוסף לא סדור של איברים בו יכולות להיות חזרות.

$$\begin{array}{ll} \left(\frac{1}{1-x^5}\right)\left(\frac{1}{1-x^4}\right)\left(\frac{1}{1-x^3}\right)\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right) & \text{I} \\ \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^{4/5}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{3/5}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{2/5}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{1/5}}\right) & \text{II} \\ x^4\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^{4/5}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{3/5}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{2/5}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{1/5}}\right) & \text{III} \\ \left(\frac{1}{1-x}\right)^k & \text{IV} \\ \left(\frac{1}{1-x}\right)^5 & \text{V} \\ x^4\left(\frac{1}{1-x}\right)^5 & \text{VI} \\ \left(\frac{1}{1-x^5}\right)^5 & \text{VII} \\ \frac{1}{1-x-x^2-x^3-x^4-x^5} & \text{VIII} \end{array}$$

שאלה 5 (20 נקודות) שאלה זו עוסקת במטריצות טרינאריות מגודל $n \times n$ עבור n טבעי וחיובי, כלומר איברים בקבוצה $\{0, 1, 2\}^{n \times n}$. בשאלה זו אין קשר בין הסעיפים.

א. (15 נק') מטריצה $A \in \{0, 1, 2\}^{n \times n}$ תקרא אינארית אם בכל שורה ובכל עמודה ישנו לפחות מופע אחד של הספרה 2. כמה מטריצות אינאריות ישנן? ניתן לרשום תשובה סופית עם סימן סכימה. נמקו את תשובתכם.

תשובה:



ב. (5 נק') בכמה מטריצות $M \in \{0, 1, 2\}^{n \times n}$ מופיעה הספרה 2 פעם אחת בלבד בכל אחד מהאלכסונים המקבילים לאלכסון הראשי (ראו תמונה)? רשמו תשובה סופית בלבד, ללא נימוק. תשובה עם סימן סכימה לא תקבל ניקוד מלא.

תשובה סופית:

שאלה 6 (20 נקודות) יהי $n \geq 2$. עבור תמורה כלשהי $\pi : [n] \rightarrow [n]$ נגדיר גרף פשוט ולא מכוון $G_\pi = ([n], E)$ על הקודקודים $\{1, \dots, n\}$. בגרף זה יש קשת בין שני איברים אם ורק אם הם התמונה תחת π של שני מספרים עוקבים. כלומר,

$$E = \{\{i, j\} \mid \exists k \in [n-1] \quad \pi(k) = i \wedge \pi(k+1) = j\}$$

א. (8 נק') הוכיחו או הפריכו: לכל תמורה π מתקיים כי G_π הוא עץ.

תשובה:

ב. (6 נק') הסתכלו על קבוצת כל הגרפים G_π עבור תמורה כלשהי π :

$$\mathcal{G} = \{G_\pi \mid \pi : [n] \rightarrow [n] \text{ היא תמורה}\}$$

מהו גודל הקבוצה? רשמו תשובה סופית בלבד. תשובה עם סימן סכימה לא תקבל ניקוד מלא.

תשובה סופית:

ג. (6 נק') כמה גרפים בקבוצה מהסעיף הקודם **אינם** איזומורפיים לגרף G_I כאשר I היא פונקציית הזהות? רשמו תשובה סופית בלבד.

תשובה סופית:

מסגרת נוספת למקרה הצורך: