

מתמטיקה בדידה 2 - מבחן מסכם מועד ב

תאריך: 21/3/2025

סגל הקורס: פרופסור גיל כהן, יואב גל-צור, איתי כהן.

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- ניתן להיעזר בדף נוסחאות אחד (כתוב משני צדדיו). השימוש במחשבון אסור.
- את התשובות יש לרשום רק על טופס הבחינה. מתברת הבחינה משמשת כטיוטה ולא תיבדק.
- יש לרשום מספר ת.ז. ומספר מחברת בראש כל אחד מהדפים בטופס.
- המבחן מורכב מ-6 שאלות. יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות, לבחירתכם, ולכתוב "לא לבדיקה" כתשובה לשאלה שבחרתם שלא לענות עליה. שווי כל שאלה 20 נקודות. במידה ועניתם על כל 6 השאלות, יבדקו 5 שאלות כלשהן (לאו דווקא הראשונות או אלו עם הניקוד הגבוה ביותר), אזי בבקשה המנעו מלעשות כך.
- אלא אם כן נכתב אחרת, יש לתת נימוק קצר לתשובתכם עבור כל שאלה במסגרת המתאימה. במקרים בהם אתם מתבקשים לכתוב הוכחה, יש לכתוב הוכחה מלאה ופורמלית.
- יש לכתוב את כל התשובות במקום המוקצב ובכתב קריא. תשובות ובהן חריגות לא זניחות מהמקום המוקצב, או תשובות הכתובות בכתב קטן באופן קיצוני או לא ברור לא ייקראו ולא יקבלו ניקוד, או שיקבלו ניקוד חלקי בלבד. תשובות שדורשות מאמצים רבים להבנתן גם כן עלולות לגרור הורדת ציון.
- לכן, מומלץ בחום לפתור ראשית במחברת ואז לרשום פתרון מסודר במסגרת. כאמור, ישנן זוג מסגרות נוספות למקרה הצורך בסוף הטופס.
- ניתן לרשום "אינני יודע/ת" כתשובה לשאלה או סעיף שלה ולקבל 20% מהניקוד. במקרה זה אין להוסיף שום הסבר.

בהצלחה!

שאלה 1 (20 נקודות) יש לענות על שני הסעיפים הבאים. אין קשר בין הסעיפים.

א. (10 נקודות) יהא n טבעי ו π תמורה על $[n]$. אינדקס $k \in [n]$ נקרא **משפיען** ב- π אם מתקיים התנאי הבא: אם k נקודת שבת של π אז לכל $j > k$ מתקיים שגם j היא נקודת שבת של π . כמה תמורות של $[n]$ ישנן בהן k משפיען?

ב. (10 נקודות) כמה עצים על n צמתים ישנם כך שהמרחק בין כל שני צמתים הוא לכל היותר 3?

שאלה 2 (20 נקודות) יש לענות על שני הסעיפים הבאים. אין קשר בין הסעיפים.
א. (10 נקודות) כמה פתרונות בטבעיים (כלומר, $x_1, \dots, x_7 \geq 0$ שלמים) יש למשוואה הבאה

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_5 + x_6 + x_7)^2 = 275$$

ב. (10 נקודות) עבור אילו ערכי $n \in \mathbb{N}$ מתקיים שהביטוי הבא שלם?

$$(\sqrt{3} + \sqrt{7})^n + (\sqrt{3} - \sqrt{7})^n$$

שאלה 3 (20 נקודות) נסתכל על קבוצת הוקטורים מאורך 9 מעל הקבוצה $[9]$. וקטור $x \in [9]^9$ יקרא **מיוחד** אם קיים $i \in [9]$ כך שבקואורדינטה ה- i ישנה הספרה i . לדוגמה, $(1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 1, 1)$ הוא מיוחד, ו- $(6, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1)$ איננו מיוחד. כמה וקטורים מיוחדים ישנם? תשובה עם סימן סכימה תזכה לניקוד חלקי.

שאלה 4 (20 נקודות) בשאלה זו שני סעיפים - אין קשר בין הסעיפים. יהי G גרף עם $n \geq 4$ קודקודים. הניחו כי n זוגי.

א. (8 נקודות) הראו כי אם מספר הצלעות הוא $m \geq (n/2) + 1$, אז בגרף קיים מסלול פשוט בצמתים מאורך 2.

ב. (12 נקודות) הראו כי אם דרגתו של כל קודקוד היא לפחות $2\sqrt{n}$, אז כל קודקוד בגרף שייך למעגל פשוט בצמתים כלשהו מאורך 4. בסעיף זה ניתן להניח כי \sqrt{n} הוא מספר שלם.



שאלה 5 (20 נקודות) במדינת בדידהסטאן יש $2n$ איים מסודרים במעגל. התושבים החליטו לבנות גשרים כדי לחבר את האיים בזוגות, כך שכל אי יהיה מחובר בדיוק לאי אחד אחר. בנוסף, בגלל שיקולים הנדסיים, על הגשרים להיות ישרים.

א. (10 נקודות) בכמה דרכים אפשר לבנות את הגשרים?

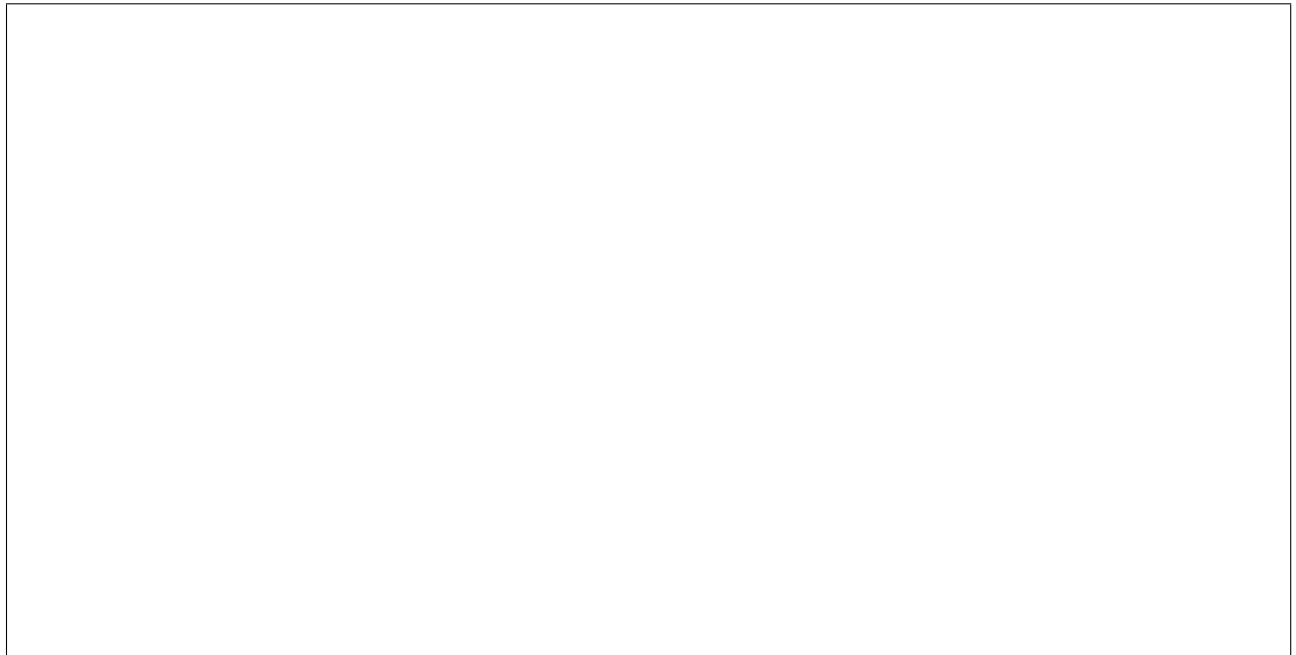
ב. (10 נקודות) בכמה דרכים אפשר לבנות את הגשרים, אם בנוסף אסור ששני גשרים יצטלבו?

שאלה 6 (20 נקודות) נגדיר את המחלקה הקומבינטורית \mathcal{T} המכילה עצים בינאריים (כלומר, לכל צומת שאינו עלה יש בדיוק שני בנים) מסודרים, מושרשים. פונקציית הגודל מוגדרת להיות מספר הצמתים בעץ **שאינם עלים**. תזכורת: צומת נקרא עלה אם דרגתו היא 1 בדיוק.

א. (5 נקודות) ציירו את כל העצים הנ"ל עבור כל אחד מהגדלים הבאים: $n = 1, 2, 3$.

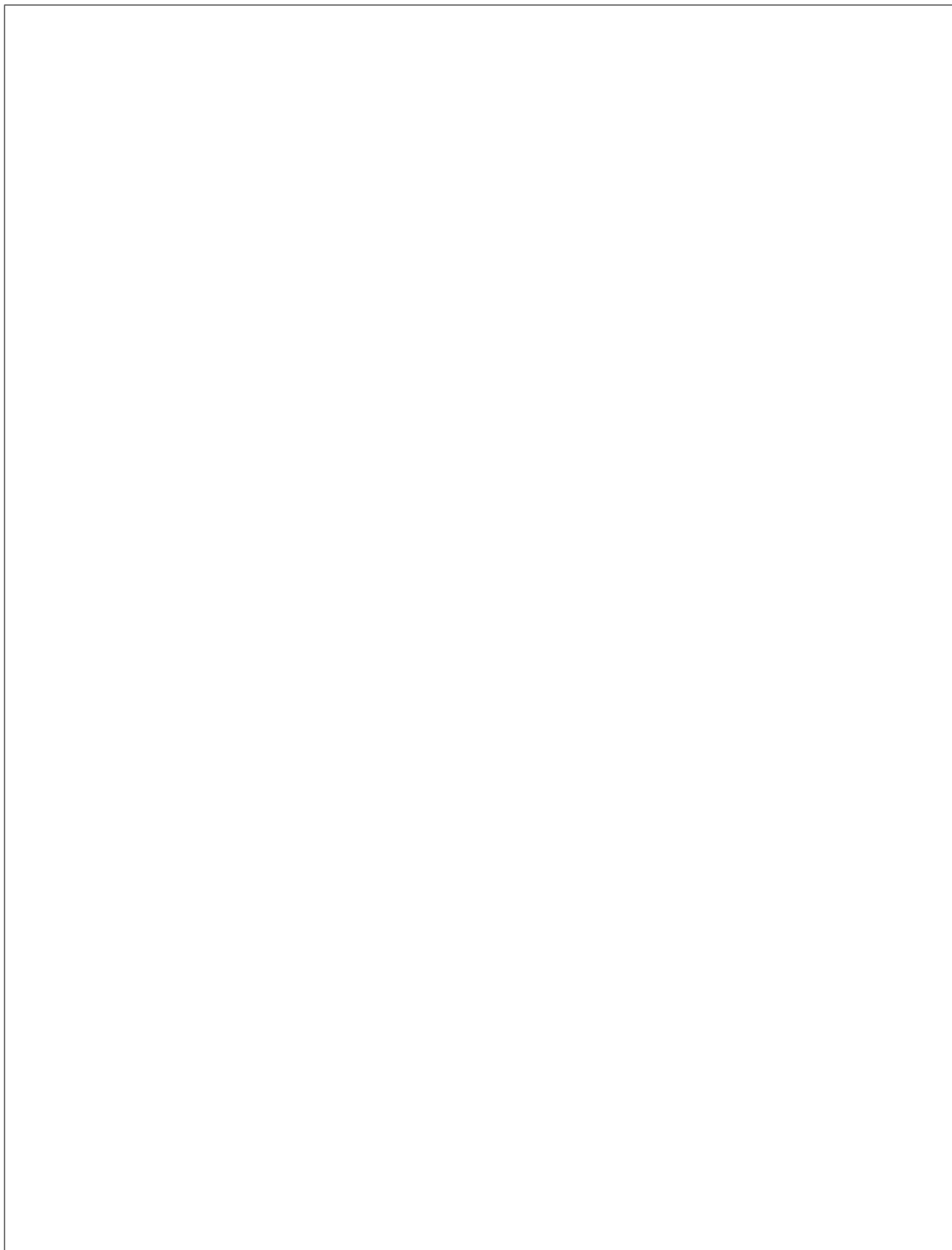


ב. (7 נקודות) כתבו יחס סימבולי עבור המחלקה \mathcal{T}



ג. (8 נקודות) תוך שימוש ביחס הסימבולי שמצאתם, חשבו את מספר העצים הנ"ל מגודל n .

מסגרת נוספת למקרה הצורך:



מסגרת נוספת שניה למקרה הצורך:

