

מערכות מרובות קיוביטים

מרגע שמושג המכפלה הטנזורית מבוסס, נוכל לנסח את חוקי מכניקת הקוונטים למערכת בת שני קיוביטים. בהמשך נכליל חוקים אלה למערכות מרובות קיוביטים, אך כבר במקרה של שניים מתרחש כל האקשן; זהו מודל פשוט יחסית המאפשר לנו להתמקד בעיקר, לפחות בהתחלה.

1 זוג קיוביטים

כזכור, קיוביט – ברמת ההפשטה המתמטית – מתואר על-ידי איבר מנורמל ב- $\mathbb{C}^2$. מצב של זוג קיוביטים הוא וקטור מנורמל במרחב הילברט $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$.

בהקשר של קיוביט בודד הזכרנו את הבסיס החישובי – בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^2$ המסומן $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. מן הבסיסים המתאימים לכל אחד מהקיוביטים – שנוזה עם השחקנים אליס ובוב – נגזור באופן טבעי את הבסיס על $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, שאיבריו הם

$$|0\rangle \otimes |0\rangle, \quad |0\rangle \otimes |1\rangle, \quad |1\rangle \otimes |0\rangle, \quad |1\rangle \otimes |1\rangle,$$

שאותם כזכור נקצר בכתוב דיראק ל-

$$|00\rangle, \quad |01\rangle, \quad |10\rangle, \quad |11\rangle.$$

זהו הבסיס החישובי המשותף, והסדר Alice-Bob נשמר.

יהי $|\psi_{AB}\rangle$ מצב של מערכת דו-קיוביטית. נאמר ש- $|\psi_{AB}\rangle$ הוא מצב מכפלה (unentangled state) אם קיימים $|\psi_A\rangle$ ו- $|\psi_B\rangle$ כך ש

$$|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle.$$

אם אין פירוק כזה – $|\psi_{AB}\rangle$ הוא מצב שזור (entangled state).

דוגמה מפורסמת למצב שזור היא מצב Bell או צמד EPR על שם איינשטיין-פודולסקי-רוזן. זהו מצב של שני קיוביטים, המוגדר באופן הבא:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$

שאנחנו נכתוב לרוב ללא נרמול כ- $|00\rangle + |11\rangle$. נניח בשלילה שקיימים $(a|0\rangle + b|1\rangle)$ ו- $(c|0\rangle + d|1\rangle)$ כך ש

$$(a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) = |00\rangle + |11\rangle.$$

פיתוח אגף שמאל נותן

$$ac |00\rangle + ad |01\rangle + bc |10\rangle + bd |11\rangle.$$

השוואת מקדמים מחייבת

$$ac = 1, \quad bd = 1, \quad ad = 0, \quad bc = 0.$$

מן $ac = 1$ ו- $bd = 1$ נובע שכולם לא מתאפסים, בסתירה ל- $ad = 0$ או $bc = 0$. מכאן שהשוויון בלתי־אפשרי.

2 אופרטורים על זוג קיוביטים

המכניקה הקוונטית קובעת כי הפעולות המותרות על מצב קוונטי דו־קיוביטי הן בדיוק האופרטורים האוניטריים על המרחב הארבע־ממדי.

אנחנו כבר מכירים אופרטורים על זוג קיוביטים: עבור כל אופרטור A שאלים יכולה להפעיל, ישנו האופרטור $A \otimes I$ המבצע פעולה על הקיוביט של אלס ולא נוגע בקיוביט של בוב. כך למשל אלס יכולה להפעיל את אופרטור האדמרד על הקיוביט שלה. בכתוב מטריוני

$$H \otimes I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

נבחין כי הפעלה של אופרטור אוניטרי מקומי – כלומר מהצורה $A \otimes I$ או $I \otimes B$ – משמרת מצבי מכפלה: מצב מכפלה נותר מצב מכפלה. יתר על כן, גם הכיוון ההפוך נכון: אם תוצאת הפעולה של אופרטור אוניטרי מקומי על מצב היא מצב מכפלה, אזי גם המצב ההתחלתי היה מצב מכפלה.

אופרטורים אוניטריים מקומיים חשובים, אך כשלעצמם אינם יוצרים תופעות חדשות: בפרט, הם אינם יכולים לייצר שזירה. למעשה, אין צורך במפגש בין הצדדים – אלס ובוב יכולים להפעיל כל אחד את האופרטור המקומי שלו בביתו. האופרטורים המעניינים באמת הם אלה הפועלים במשותף על זוג קיוביטים (אופרטורים דו־קיוביטיים). במימושים פיזיקליים נדרשת לשם כך אינטראקציה: למשל, סידור אופטי דוגמת מבוך מראות שבו שני הפוטונים (הממשים את הקיוביטים) עוברים ומתקשרים זה עם זה.

לעיתים נכנה אופרטורים בשם "שערים"; למשל, שער ההיפוך המבוקר (CNOT) שנראה מיד. בהמשך ניציג חישוב קוונטי באמצעות דיאגרמות של מעגלים, בדומה למעגלים דיגיטליים בחשמל הקלאסי, והאופרטורים הפועלים על מספר קטן של קיוביטים יישמשו כשערי המעגל. נציין כבר כאן שמקור המונח "שער" הוא באנלוגיה ישירה לשערים לוגיים במחשוב הקלאסי.

2.1 שער CNOT

אחד האופרטור החשובים ביותר הפועלים על זוג קיוביטים הוא ה שער NOT מבוקר (או שער היפוך מבוקר). או בשמו הקצר יותר שער CNOT. זהו אופרטור שברמה הלא פורמלית מוגדר באופן הבא: אם הקיוביט הראשון, המכונה קיוביט הבקרה (control) הוא $|0\rangle$ לא עושים דבר, אחרת הקיוביט השני המכונה קיוביט היעד (target) מתהפך. כלומר, אם הוא היה במצב $|0\rangle$ הוא הופך ל- $|1\rangle$, ואם הוא היה במצב $|1\rangle$ הוא הופך ל- $|0\rangle$.

כזכור, המכניקה הקוונטית קובעת כי הפעולות המותרות על מצב קוונטי דו-קיוביטי הן בדיוק האופרטורים האוניטריים על המרחב הארבע-ממדי. פורמלית, בכדי לתאר האופרטור המתאים נציג אותו בייצוג מטריציוני:

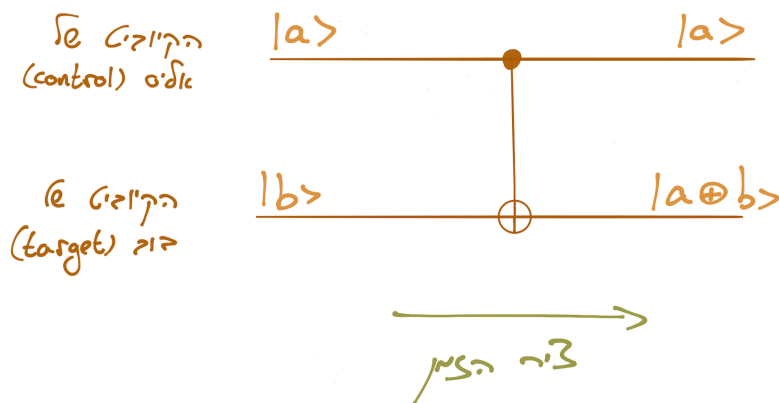
$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נבחין כי התאור הלא פורמלי שלנו הוא בעצם תאור פורמלי במובן הזה שתיארנו איך האופרטור פועל על הבסיס החישובי, וכמובן פעולתו נקבעת מכאן על כל המרחב. בבסיס חישובי זה ניתן לכתוב את הפעולה של שער ה CNOT כך:

$$|a, b\rangle \longrightarrow |a, a \oplus b\rangle$$

כאשר $a, b \in \{0, 1\}$ ו- $\oplus$ הוא חיבור מודולו 2.

כאמור, אנו נייצג את הפעולות שלנו בדיאגרמות בהן האופרטורים המופעלים הם השערים. הייצוג של שער ה- CNOT נראה כך:



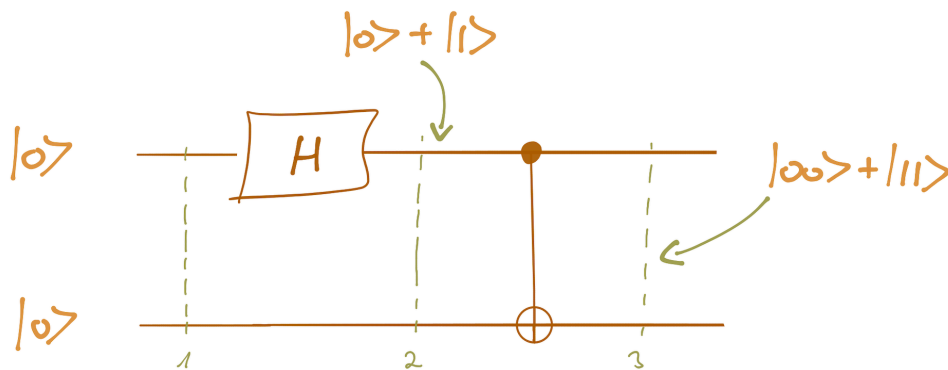
האופרטור CNOT הוא אוניטרי. דרך אחת לראות זאת: הוא הרמיטי ($\text{CNOT}^\dagger = \text{CNOT}$) וגם אינבולוציה ($\text{CNOT}^2 = I$), ולכן $\text{CNOT}^\dagger \text{CNOT} = I$. דרך כללית יותר: CNOT הוא אופרטור פרמוטציה של הבסיס החישובי, ואופרטור פרמוטציה הוא תמיד אוניטרי.

2.1.1 הכנת מצב Bell

את אופרטור האדמרד שראינו ביחידות הקודמות מסמנים בדיאגרמה כשער עם התווית H . נסתכל בדיאגרמה הבאה המחשבת את האופרטור

$$\text{CNOT}(H \otimes I)$$

שימו לב: בדיאגרמות מעגלים קוונטיים קוראים את סדר פעולת השערים משמאל לימין, ואילו במכפלת אופרטורים הפעולה מתבצעת מימין לשמאל.



בנקודת זמן 1 המצב של המערכת הוא $|00\rangle$. בנקודת זמן 2, אחרי הפעלת שער האדמרד על ידי אליס, המערכת במצב

$$H|0\rangle \otimes |0\rangle = (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle = |00\rangle + |10\rangle$$

מצב המערכת ביציאה, כלומר בנקודת זמן 3 הוא

$$\text{CNOT}(|00\rangle + |10\rangle) = \text{CNOT}|00\rangle + \text{CNOT}|10\rangle = |00\rangle + |11\rangle.$$

כלומר, המעגל הקטן שלעיל מכין זוג קיוביטים במצב Bell כאשר אלו מאותחלים שניהם לאפס.

2.2 אופרטור ההחלפה

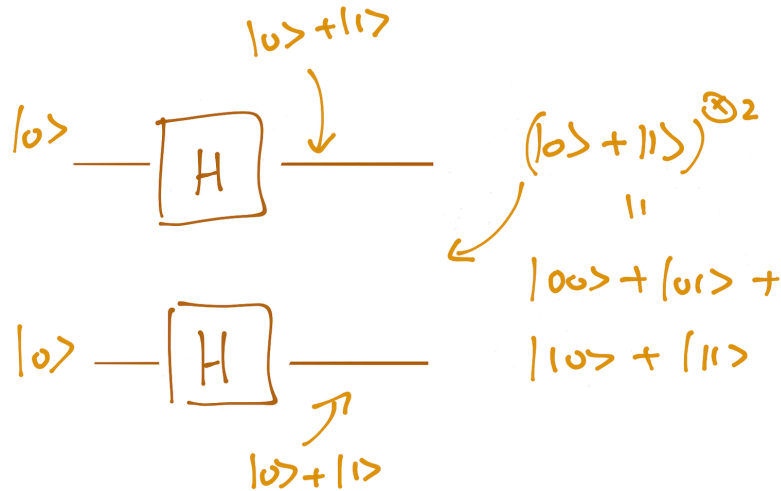
אופרטור שימושי נוסף הוא אופרטור ההחלפה, המסומן SWAP. פעולתו בבסיס החישובי היא החלפת ערכי הקיוביטים: $\text{SWAP}|x, y\rangle = |y, x\rangle$. בייצוג מטריציוני (בבסיס החישובי):

$$\text{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3 אופרטור האדמרד על שני קיוביטים

אופרטור אוניטרי מקומי שימושי מתקבל על-ידי המכפלה הטנזורית של אופרטור האדמרד עם עצמו – כלומר הפעלת H על כל אחד מן הקיוביטים:

$$H^{\otimes 2} = H \otimes H.$$



בבסיס החישובי $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ מתקבל הייצוג

$$H^{\otimes 2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

ולחלופין, עבור $|xy\rangle$ עם $x, y \in \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} H^{\otimes 2} |xy\rangle &= \frac{1}{2} \sum_{a,b \in \{0,1\}} (-1)^{ax+by} |ab\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a,b \in \{0,1\}} (-1)^{\langle (a,b), (x,y) \rangle} |ab\rangle. \end{aligned}$$

בפרט, הפעלה שלו עד זוג קיוביטים המאותחלים לאפס נותן

$$H^{\otimes 2} |00\rangle = \frac{1}{2} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle).$$

3 מדידה ומדידה חלקית

עד כה למדנו כיצד לייצג מערכת של שני קיוביטים ואילו אופרטורים ניתן להפעיל עליה. נותר להבין את כללי המדידה של מערכת כזו על פי המכניקה הקוונטית. הכלל פשוט: בהינתן מצב

$$|\psi\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle,$$

מדידה בבסיס החישובי תיתן את התוצאה ij בהסתברות $|\alpha_{ij}|^2$ לכל $i, j \in \{0, 1\}$. מיד לאחר המדידה המצב יקרוס למצב החישובי המתאים $|ij\rangle$.

נבחין כי הנורמליזציה $\|\psi\|^2 = 1$ מבטיחה ש- $\sum_{i,j} |\alpha_{ij}|^2 = 1$, ולכן אכן מתקבלת התפלגות הסתברות.

במקרים רבים אנחנו לא נבצע מדידה של כלל הקיוביטים במערכת. השאלה המתבקשת היא: מה קורה אם רק אליס מודדת את הקיוביט שלה? מצב זה מכונה **מדידה חלקית** (partial measurement), כלומר מדידה על תת-מערכת של אליס בלבד. לפי חוקי המכניקה הקוונטית, עבור המצב $|\psi\rangle$ שהוגדר לעיל, מדידה בבסיס החישובי על הקיוביט של אליס נותנת את התוצאה 0 בהסתברות

$$p_0 = |\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2.$$

כלומר, זהו סכום ריבועי המודולים של האמפליטודות המתאימות למקרים שבהם אליס מודדת 0. באופן דומה, ההסתברות שאליס תקבל 1 היא

$$p_1 = 1 - p_0 = |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2.$$

מיד לאחר המדידה, אם אליס מדדה 0, המצב המשותף קורס ל-

$$|\phi_0\rangle = |0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{p_0}}(\alpha_{00} |0\rangle + \alpha_{01} |1\rangle),$$

ובאופן דומה, אם אליס מדדה 1, המצב המשותף קורס ל-

$$|\phi_1\rangle = |1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{p_1}}(\alpha_{10} |0\rangle + \alpha_{11} |1\rangle).$$

שימו לב שהמצבים לעיל מנורמלים. אכן,

$$\|\phi_0\|^2 = \| |0\rangle \|^2 \cdot \frac{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}{p_0} = 1,$$

ובאותו אופן $\|\phi_1\|^2 = 1$. נוסף על כך, לא תיתכן חלוקה באפס: אם למשל $p_0 = 0$, התוצאה 0 פשוט אינה יכולה להופיע.

4 צמד EPR ו-Spooky action at a distance

אחת המוזרויות הבולטות בתורת הקוונטים מתגלה כשחושבים על מדידה חלקית של מצב שזור, למשל מצב בל. נניח שאלים ובוב מכינים במעבדה צמד EPR ונפרדים, כל אחד עם הקיוביט שבידו. כאשר אלים מודדת את הקיוביט שלה, היא משפיעה על הקיוביט של בוב באופן מיידי. לכאורה, אפקט זה סותר את תורת היחסות - אי אפשר לעבור את מהירות האור. איינשטיין כינה זאת Spooky action at a distance.

ואמנם, הפרדוקס שהציגו איינשטיין-פודולסקי-רוזן נוגע בדיוק בנקודה זו: לכאורה מתקיימת השפעה מיידיית בין חלקיקים מרוחקים (המיוצגים כאן באמצעות קיוביטים). חשוב להבחין כי אף שמתקבלות קורלציות מיידייות בין גופים פיזיקליים רחוקים, אין בכך העברת מידע: תוצאת המדידה של אלים אקראית מבחינתה, ולכן אין ביכולתה "לשתול" מסר שבוב יקבל מיידיית. לפיכך יש כאן אי-לוקליות של הקורלציות, אך אין כאן סתירה לתורת היחסות, הגורסת בין היתר שלא ניתן להעביר מידע במהירות הגדולה ממהירות האור.

אפשר להעלות אנלוג קלאסי: צד שלישי, צ'ארלי, מטיל מטבע ומחלק לשני הצדדים מעטפות אטומות עם הפתק ע"פ התוצאה. אם אלים פותחת את המעטפה (כלומר "מודדת"), היא יודעת מייד גם מה כתוב אצל בוב - ואין בכך פלא. זה היה קו הטיעון של איינשטיין ומתנגדי התיאור הקוונטי: יש "משתנה חבוי" (hidden variable) שקובע מראש את התוצאות, ותורת הקוונטים "מתעלמת" ממנו ולכן תיאורה אינו שלם. במקרה הזה מדובר באותו מטבע שבאמת הוטל.

אלא שההשוואה הזו רדוקטיבית מדי: בעולם הקלאסי לאלים יש למעשה "בסיס מדידה" יחיד - לקרוא את הפתק (כלומר למדוד רק בבסיס החישובי). בעולם הקוונטי אלים יכולה לבחור כל בסיס מדידה; לחלופין, היא יכולה להפעיל טרנספורמציה אוניטרית על הקיוביט שלה לפני/אחרי המדידה. למשל, אם אלים מודדת בבסיס $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, הקיוביט של בוב קורס לאותו איבר בבסיס. ואכן,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle).$$

מכאן נדמה שאלים אולי כן יכולה "לקודד" מידע באמצעות בחירת בסיס המדידה שלה. אולם מתברר שבוב, אם הוא מבודד ואינו מקבל מאלים את תוצאת המדידה או את בחירת הבסיס, אינו יכול להבחין בין הבחירות השונות שלה. לנקודה זו נשוב בהמשך הקורס כאשר נדון במצבים מעורבים, אבל כן נגיד מילה על הנושא כבר עכשיו. לפני שנפנה לכך, נציין שכבר ביחידות הקרובות נדון בניסוי חשוב - שנערך בפועל - המוכיח מעבר לכל ספק כי לא ייתכן קיומו של משתנה חבוי.

5 מצבים טהורים ומצבים מעורבים

מרגע שביצענו מדידה חלקית על אלים, ידוע שהמערכת נמצאת במצב $|\phi_0\rangle$ בהסתברות p_0 ובמצב $|\phi_1\rangle$ בהסתברות p_1 . לכן, המודל המתמטי הנכון למצב המערכת לאחר המדידה - מבלי לבצע את המדידה בפועל - הוא התפלגות הסתברות (קלאסית) על מצבים קוונטיים.

מפתה לכתוב

$$p_0 |\phi_0\rangle + p_1 |\phi_1\rangle,$$

אבל זה אינו הביטוי הנכון: זהו עירוב של טיפוסים. הביטוי לעיל מתאר סופרפוזיציה קוונטית שבה המקדמים הם אמפליטודות, ואילו כאן p_0, p_1 הן הסתברויות קלאסיות לכך שהמערכת נמצאת באחד משני המצבים $|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle$; הן אינן חלק מוקטור המצב.

מצב קוונטי כפי שהוגדר עד כה – איבר במרחב הילברט $\mathbb{C}^2$ או $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ – נקרא **מצב טהור** (pure state). המונח תקף גם למצבים שזורים, למשל מצבי בל. התפלגות הסתברותית על מצבים טהורים נקראת **מצב מעורב** (mixed state).

כבר כאן מתחדדת חשיבותם של מצבים מעורבים: מרגע שמבצעים מדידה (ואין ברשותנו התוצאה), אי־אפשר עוד לתאר את המערכת כמצב טהור, וחובה להשתמש במודל הכללי של מצב מעורב. מבחינה פדגוגית נהוג לדחות את הדיון במצבים מעורבים – וברוב המקרים שניתקל בהם המדידה מתבצעת רק בסוף החישוב, כך שלעת־עתה ניתן להימנע מהם – אולם ביחידה זו נידרש למושג זה, וטוב להכירו כבר כעת: זהו התיאור הכללי והשלם של מצב קוונטי. בכל מקרה, המונח "מצב" במהלך הקורס ישמש לתיאור מצב טהור.

6 סדר המדידה: אליס ואז בוב לעומת מדידה ב־זמנית

נבחן את הקשר בין מדידה מדורגת (אליס ואז בוב) לבין מדידה ב־זמנית. כאשר אליס מבצעת מדידה חלקית, בהסתברות p_i אנו במצב $|\phi_i\rangle$ עבור $i = 0, 1$. נניח שאליס מדדה 0. אז הקיוביט של בוב נמצא במצב

$$\frac{1}{\sqrt{p_0}}(\alpha_{00} |0\rangle + \alpha_{01} |1\rangle).$$

כששוב מודד את הקיוביט שבידו, ההסתברויות המותנות הן

$$\Pr(0 | 0 \text{ אליס}) = \left| \frac{\alpha_{00}}{\sqrt{p_0}} \right|^2 = \frac{|\alpha_{00}|^2}{p_0}, \quad \Pr(1 | 0 \text{ אליס}) = \left| \frac{\alpha_{01}}{\sqrt{p_0}} \right|^2 = \frac{|\alpha_{01}|^2}{p_0}.$$

לכן ההסתברות המשותפת שאליס ובוב יקבלו 00 היא

$$\Pr(0 \text{ אליס}) \cdot \Pr(0 \text{ בוב} | 0 \text{ אליס}) = p_0 \cdot \frac{|\alpha_{00}|^2}{p_0} = |\alpha_{00}|^2,$$

והמצב קורס ל- $|00\rangle$. באופן דומה מתקבלות ההסתברויות האחרות בדיוק כפי שהוגדר למדידה ב־זמנית.

7 מעבר לשני קיוביטים

ניתן להכליל את הדיון למערכת של n קיוביטים, לכל $n \geq 1$, באופן טבעי. מצב כזה הוא וקטור יחידה ב-

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes n},$$

וכל מה שלמדנו על האופרטורים המותרים ועל חוקי המדידה מוכלל בצורה טבעית. האמור תקף גם למערכות שאינן מורכבות מקיוביטים. למשל, לאלים יכולה להיות מערכת בת שלושה מצבים ולבוב מערכת בת חמישה מצבים; אז המרחב הוא

$$\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^5,$$

והחוקים מוכללים באותו אופן. עם זאת, ברוב המקרים נעסוק בקיוביטים.

נקודה מעניינת – ואף פרדוקסלית – נוגעת לכמות המידע הנדרשת כדי לתאר מערכת קוונטית מבחינה פיזיקלית. מצב של 500 קיוביטים הוא איבר ב-

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes 500},$$

ולפיכך מספר פרטי המידע שהטבע "נדרש לתחזק" כדי לתאר מצב כזה גדול בהרבה ממספר האטומים ביקום הנצפה. המידע אינו "שוכן" בכל חלקיק בנפרד, אלא מצטבר בקורלציות השזירה שביניהם.

באופן כללי, תורת הקוונטים קובעת כי כל מערכת פיזיקלית סגורה ניתנת לייצוג מתמטי במרחב הילברט הנקרא **מרחב המצבים** (state space). בכל רגע נתון מצבה של המערכת מתואר במלואו על-ידי וקטור יחידה במרחב זה. המרחב הזה אינו בהכרח מממד סופי. למשל מיקומו של חלקיק הוא גודל רציף.

המושג "מערכת סגורה" חשוב כאן והוא קשור לדיון במצבים מעורבים. חשבו, למשל, על מצב שבו אלים ובוב מכינים צמד בל, ואלים יוצאת לדרכה ואינה חוזרת. במקרה כזה נרצה לנתח את הקיוביט של בוב בנפרד מאלים, אך הוא אינו מערכת סגורה כשלעצמו, שכן מדידה של אלים עשויה להשפיע על מצבו. בהמשך הקורס ייתכן ונראה כיצד לנתח מצבים כאלה.

אחד האתגרים המרכזיים בחישוב קוונטי הוא שהנחת הסגירות היא אידיאליזציה: כל קיוביט במחשב קוונטי מקיים אינטראקציות כלשהן עם הסביבה, ולכן אי-אפשר להתייחס אליו כמערכת סגורה לחלוטין. במשך רוב הקורס ננתח מערכות סגורות בלבד – כלומר נדון במצבים טהורים – ובהמשך, אם הזמן יאפשר, נרחיב למערכות שאינן סגורות ולמצבים מעורבים.

מה גורסת תורת הקוונטים לגבי אופרטורים? אם בזמן t_1 המערכת נמצאת במצב $|\psi_1\rangle$ ובזמן t_2 במצב $|\psi_2\rangle$, אז קיים אופרטור אוניטרי (אפשר שגם אינסוף-ממדי) $U = U(t_1, t_2)$ כך ש- $|\psi_2\rangle = U|\psi_1\rangle$.

עיקרון יסודי זה נובע ממשוואת שרדינגר: מצב קוונטי $|\psi(t)\rangle$ מתפתח לפי

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle,$$

כאשר H הוא ההמילטוניאן (Hamiltonian) של המערכת – אופרטור הרמיטי. הקבוע $\hbar$ (קבוע פלנק) אינו

מהותי לדיון הנוכחי. הפתרון למשוואת שרדינגר נתון על ידי

$$|\psi(t_2)\rangle = \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_2-t_1)}}_{U(t_1,t_2)} |\psi(t_1)\rangle$$

מכאן נובע שבתיאור בדיד בזמן – כפי שמעניין אותנו בהקשר של חישוב קוונטי – הטרגספורמציות המותרות הן בהכרח אוניטריות.