

המכפלה הטנזורית של מרחבים וקטוריים

נניח שאלים מכינה במעבדתה קיוביט במצב

$$|\psi_A\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle$$

באופן דומה, בוב מכין במעבדתו קיוביט במצב

$$|\psi_B\rangle = \beta_0 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle$$

אלים ובוב רוצים להיפגש ולעבוד יחד על הקיוביטים שלהם. המערכת המשותפת היא איבר במרחב 4 ממדי מעל המרוכבים שכן נדרשות ארבע אמפליטודות בכדי לתאר את המצב המשותף שלהם. לצורך תיאור פורמלי של המצב הזה נצטרך להיזכר או ללמוד על מושג המכפלה הטנזורית, וזו אכן מטרת היחידה הזו. אבל לפני כן, ננסה לעקוב אחר האינטואיציה שלנו. אם נרשה לעצמנו לחשוב - אם כי אין זה מדויק - על אמפליטודות כעל אנלוג של הסתברויות אז נוכל לקרוא את המצב של אלים ככזה בו "באמפליטודה" α_0 אלים במצב $|0\rangle$ ו"באמפליטודה" α_1 אלים במצב $|1\rangle$. שוב, אין לביטוי הזה הרבה משמעות מעבר להחלפה של המילה "בהסתברות" ב"באמפליטודה", אבל העיקרון כפי שנראה זהה וייאפשר לנו לקבל סוג של אינטואיציה להמשך. בכל מקרה, אותו כנ"ל אפשר להגיד גם על המצב של בוב ולכן מפתה להגיד ש"באמפליטודה" $\alpha_0\beta_0$ המצב המשותף של אלים ובוב יהיה משהו שמרגיש נכון לסמן אותו כ- $|00\rangle$. באותו אופן, באמפליטודה $\alpha_1\beta_0$ המצב המשותף יהיה $|10\rangle$ ואותו כנ"ל לגבי שני המצבים הנותרים. כלומר, המצב המשותף שלהם ניתן לכתיבה כ

$$|\psi_{AB}\rangle = \alpha_0\beta_0 |00\rangle + \alpha_1\beta_0 |10\rangle + \alpha_0\beta_1 |01\rangle + \alpha_1\beta_1 |11\rangle.$$

נעבור כעת להגדיר את המכפלה הטנזורית, כדי שנוכל לתאר באופן פורמלי מצב קוונטי משותף של מספר קיוביטים.

1 מכפלה טנזורית

המכפלה הטנזורית היא דרך לאחד מרחבים וקטוריים למרחב משותף גדול יותר. זהו מושג מרכזי במתמטיקה (מעבר לאלגברה לינארית). בהקשר של מרחבים וקטוריים, המכפלה הטנזורית מממשת בדיוק את הדרוש כדי למדל באופן מתמטי מצב קוונטי משותף של כמה קיוביטים. אנו נתחיל לתאר את מושג המכפלה הטנזורית בעזרת הנוטציה הסטנדרטית מאלגברה לינארית.

יהיו V ו- W מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{C}$, וממדיהם m ו- n בהתאמה. המרחב $V \otimes W$ (קרי: V טנזור W) הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ שאיבריו הם צירופים ליניאריים של סמלים פורמליים מן הצורה $v \otimes w$ עם $v \in V$

ו- $w \in W$, בכפוף לזהויות הביליניאריות הבאות התקפות לכל $v, v' \in V, w, w' \in W$ ו- $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}(v + v') \otimes w &= v \otimes w + v' \otimes w, \\ v \otimes (w + w') &= v \otimes w + v \otimes w', \\ (\alpha v) \otimes w &= v \otimes (\alpha w) = \alpha (v \otimes w).\end{aligned}$$

אם $\{v_i\}_{i=1}^m$ ו- $\{w_j\}_{j=1}^n$ הן בסיסים של V ושל W בהתאמה, אז לא קשה להוכיח כי $\{v_i \otimes w_j\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ הוא בסיס של $V \otimes W$; בפרט, $\dim(V \otimes W) = mn$.

2 דוגמה – מערכת של שני קיוביטים

ננסה להבין כיצד ההגדרה המופשטת של המכפלה הטנזורית מתכתבת עם הדיון הלא פורמלי שלנו על מערכת של שני קיוביטים. במקרה זה V ו- W הם מרחבים וקטוריים דו-ממדיים מעל שדה המרוכבים. דוגמאות לאיברים במרחב $V \otimes W$ הן

$$|0\rangle \otimes |0\rangle, \quad |0\rangle \otimes |0\rangle - 2i |1\rangle \otimes |1\rangle, \quad |0\rangle \otimes |+\rangle.$$

נבחין כי הדוגמה האחרונה שקולה, לפי הזהויות המגדירות את המכפלה הטנזורית, ל-

$$|0\rangle \otimes |+\rangle = |0\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle),$$

נזכור כי המכפלה הטנזורית אינה חילופית (לא קומוטטיבית) במובן שלפיו, למשל,

$$|0\rangle \otimes |1\rangle \neq |1\rangle \otimes |0\rangle.$$

ואכן, חשוב לנו להבדיל בין אליס ולבין בוב.

בכתיב דיראק נהוג לקצר: במקום המצב $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$ נכתוב $|\psi, \phi\rangle$ ואף $|\psi\phi\rangle$, תוך הקפדה על סדר הגורמים. כך, הדוגמאות שלעיל נכתבות כ-

$$|00\rangle, \quad |00\rangle - 2i |11\rangle, \quad |0+\rangle.$$

3 המכפלה הטנזורית – ייצוג לאחר בחירת בסיס

המכפלה הטנזורית, כפי שהצגנו כאן, היא פעולה אבסטרקטית: היא בונה מרחב חדש ממרחבים קיימים באמצעות הגדרת סמלים פורמליים חדשים מן איברי המרחבים (למשל $v \otimes w$ כאשר $v \in V$ ו- $w \in W$), המקיימים חוקים

מסוימים. במובן מסוים זו הדרך ה"נקייה" מבחינה מתמטית להגדיר מכפלה טנזורית, והיא גם נוחה לעבודה בהקשר של חישוב קוונטי. ובכל זאת נציג גם דרך נוספת להסתכל על המכפלה הטנזורית – הגדרה הדורשת בחירת בסיס לכל אחד מן המרחבים (משהו שמתמטיקאים בדרך כלל פחות אוהבים לראות ברמת ההגדרה, ובצדק).

נתבונן בוקטור עמודה – למשל, הווקטור המייצג את הקיוביט של אליס:

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

עצם הכתיבה של איבר במרחב הווקטורי בוקטור עמודה (בניגוד לאיבר אבסטרקטי v) מניחה בסיס כלשהו ברקע. במקרה זה מדובר בבסיס החישובי: הכניסה הראשונה בוקטור היא המקדם של איבר הבסיס $|0\rangle$, והכניסה השנייה היא המקדם של $|1\rangle$.

המכפלה הטנזורית של המרחב שבו חי הקיוביט של אליס עם המרחב שבו חי הקיוביט של בוב היא מרחב מממד 4, הנפרש על-ידי וקטורי הבסיס $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$. מתקיים כי המכפלה הטנזורית של וקטור העמודה של אליס עם וקטור העמודה

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$$

של בוב היא

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0\beta_0 \\ \alpha_0\beta_1 \\ \alpha_1\beta_0 \\ \alpha_1\beta_1 \end{pmatrix},$$

בהתאם לבסיס הסדור $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. אכן,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} &= (\alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle) \otimes (\beta_0 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle) \\ &= (\alpha_0 |0\rangle) \otimes (\beta_0 |0\rangle) + (\alpha_0 |0\rangle) \otimes (\beta_1 |1\rangle) + \\ &\quad (\alpha_1 |1\rangle) \otimes (\beta_0 |0\rangle) + (\alpha_1 |1\rangle) \otimes (\beta_1 |1\rangle) \\ &= \alpha_0\beta_0 |00\rangle + \alpha_0\beta_1 |01\rangle + \alpha_1\beta_0 |10\rangle + \alpha_1\beta_1 |11\rangle \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_0\beta_0 \\ \alpha_0\beta_1 \\ \alpha_1\beta_0 \\ \alpha_1\beta_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כלומר, באופן מעשי, המכפלה הטנזורית של שני וקטורי עמודה מתקבלת על-ידי "הכפלת" הווקטור השני בכל רכיב

של הראשון ושרשור התוצאות. בכליות, עבור $\vec{u} = (u_1, \dots, u_m)^T$ ו- $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$ נקבל

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \vec{v} \\ u_2 \vec{v} \\ \vdots \\ u_m \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 \\ u_1 v_2 \\ \vdots \\ u_m v_n \end{pmatrix},$$

כאשר יש להבין זאת כשרשור של הוקטורים לתת-בליקים לוקטור עמודה יחיד באורך mn .

דוגמה

$$\begin{aligned} |+- \rangle &= |+\rangle \otimes |-\rangle \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle). \end{aligned}$$

הערה. לא כל וקטור ב- $V \otimes W$ הוא מן הצורה $v \otimes w$ (וקטור פשוט); וקטור כללי הוא צירוף ליניארי של כאלה. ניתן לראות זאת משיקולי ממד: כדי לתאר וקטור פשוט $v \otimes w$ די ב- $m+n$ פרמטרים (קואורדינטות של v ושל w), בעוד שלתיאור וקטור כללי ב- $V \otimes W$ נדרשים mn פרמטרים. במקרה הדו-ממדי (קיוביטים) שיקול הממדים אינו מבחין, משום ש- $2 \cdot 2 = 2 + 2$; אף-על-פי-כן קיימים וקטורים שאינם פשוטים, ונראה דוגמה לכך בהמשך.

4 המכפלה הפנימית של מרחב המכפלה הטנזורית

מכיוון ש- V ו- W הם לא רק מרחבים וקטוריים אלא גם מרחבי מכפלה פנימית, המכפלות הפנימיות שלהם משרות באופן טבעי מכפלה פנימית על המרחב $V \otimes W$. המכפלה הפנימית של שני וקטורים יסודיים במרחב הטנזורי, $v_1 \otimes w_1$ ו- $v_2 \otimes w_2$, מוגדרת על-ידי

$$\langle v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2 \rangle \triangleq \langle v_1, v_2 \rangle \langle w_1, w_2 \rangle.$$

ניתן להראות שהגדרה זו מקיימת את כל תכונות המכפלה הפנימית. בפרט, $V \otimes W$ מצויד עם נורמה המושרה מן המכפלה הפנימית, ומתקיים

$$\begin{aligned} \|v \otimes w\|^2 &= \langle v \otimes w, v \otimes w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle \\ &= \|v\|^2 \|w\|^2. \end{aligned}$$

לכן

$$\|v \otimes w\| = \|v\| \|w\|.$$

בהקשר שלנו, עבור שני קיוביטים במצבים $|\psi_A\rangle$ ו- $|\psi_B\rangle$ בהתאמה, מתקבל

$$\| |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle \| = \| |\psi_A\rangle \| \| |\psi_B\rangle \| = 1,$$

כלומר המערכת המשותפת של שני הקיוביטים היא איבר מנורמה 1 במרחב ארבע-ממדי.

4.1 מרחבי הילברט?

כאשר לומדים מכניקה קוונטית נתקלים לא פעם במונח "מרחב הילברט". ההגדרה הפורמלית עדינה במקצת: זהו מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית, בתוספת תכונת שלמות שאומרת, בגדול, שאין "חורים" במרחב. ליתר דיוק, מרגע שיש מכפלה פנימית אפשר להגדיר נורמה $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, ומכאן מוגדרים גם מרחקים: המרחק בין u ל- v מוגדר על ידי $\|u - v\|$. ברגע שביססנו את המטריקה הזו ניתן לדבר על התכנסות; מרחב הילברט הוא מרחב מכפלה פנימית שבו כל סדרת קושי מתכנסת – כלומר, כל סדרה שאיבריה מתקרבים זה לזה "עם הזמן" מתכנסת לאיבר השייך למרחב.

אפשר לחשוב על שדה המספרים הרציונליים כדוגמה שיש בה חורים (אם כי כאן החורים הם ברמת השדה עצמו ולא במרחב וקטורי מעל שדה): יש סדרות של רציונליים המתכנסות ל- π , אך π עצמו איננו רציונלי. במובן זה, שדה המספרים הממשיים הוא *ההשלמה* של שדה הרציונליים.

למזלנו, תופעת החורים עלולה להופיע רק במרחבי מכפלה פנימית מממד אינסופי. בממד סופי (על $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$) כל

מרחב מכפלה פנימית הוא שלם ולכן הוא מרחב הילברט. בחישוב קוונטי נעסוק אך ורק במרחבים מממד סופי (הממד קשור למספר הקיוביטים במערכת; למשל, עבור n קיוביטים הממד הוא, כפי שנראה גדול, 2^n , אך סופי). לכן, לצורכינו, המונחים מרחב הילברט ומרחב מכפלה פנימית מזדהים.

5 אופרטורים במרחב מכפלה טנזורית

ככל הנראה אליס ובוב נפגשים כדי לעבוד יחד על הקיוביטים שלהם. אילו אופרטורים אפשר להפעיל על המצב המשותף? סוג טבעי מתקבל כאשר כל אחד פועל מקומית על החלק שלו—וזה מוביל להגדרה הבאה מאלגברה לינארית.

יהיו V, W מרחבים כבעבר, ויהיו A אופרטור לינארי על V ו- B אופרטור על W . נגדיר אופרטור על $V \otimes W$, המסומן

$$A \otimes B,$$

כך שלכל $v \in V$ ו- $w \in W$ מתקיים

$$(A \otimes B)(v \otimes w) \triangleq (Av) \otimes (Bw),$$

ואת הפעולה על איבר כללי נרחיב לינארית. כלומר, אם $x = \sum_k \alpha_k (v_k \otimes w_k)$ אז

$$(A \otimes B)x = \sum_k \alpha_k (Av_k) \otimes (Bw_k).$$

5.1 תכונות בסיסיות

בילינאריות. לכל אופרטורים מממדים מתאימים מתאימות תכונות הבילינאריות:

$$\begin{aligned} (\alpha A + A') \otimes B &= \alpha(A \otimes B) + A' \otimes B \\ A \otimes (\beta B + B') &= \beta(A \otimes B) + A \otimes B'. \end{aligned}$$

הרכבה. תכונה חשובה נוספת היא תכונת ההרכבה

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD).$$

משמעות התכונה היא שכאשר האופרטור מתפצל כ- $A \otimes B$, כל רכיב פועל במרחב שלו בלבד: A על V ו- B על W , ללא תלות במה שמתרחש במרחב השני. איבר היחידה במכפלה הטנזורית הוא

$$I_V \otimes I_W = I_{V \otimes W}$$

בפרט $A \otimes I_W$ הוא אופרטור שפועל רק על המרחב הראשון, ולא "נוגע" בשני. באופן דומה $I_V \otimes B$ פועל רק על המרחב השני. זו תהיה הדרך שלנו לכתוב באופן פורמלי אופרטור בו אליס, למשל, "לא עושה שום דבר" בזמן שבו מפעיל איזשהו אופרטור על הקיוביט שלו. נבחין כי

$$A \otimes B = (A \otimes I)(I \otimes B) = (I \otimes B)(A \otimes I)$$

כלומר, הפעלה של זוג אופרטורים כל אחד על המרחב שלו לא חייב להתבצע "בו זמנית".

האופרטור ההופכי. עבור אופרטורים הפיכים A, B מתקיים ש- $A \otimes B$ הפיך וההפכי שלו הוא

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

אכן,

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) = I_V \otimes I_W = I_{V \otimes W}.$$

הצמדה. הצמדה במכפלה הטנזורית מקיימת

$$(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger$$

לכן, אם A ו- B יוניטריים—גם $A \otimes B$ יוניטרי.

אסוציאטיביות. תכונה נוספת של המכפלה הטנזורית לאופרטורים היא אסוציאטיביות: לכל שלושה אופרטורים A, B, C מתקיים

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C).$$

לפיכך נהוג להשמיט את הסוגריים ולכתוב פשוט $A \otimes B \otimes C$. בפרט, עבור $n \geq 2$ נגדיר

$$A^{\otimes n} := \underbrace{A \otimes \dots \otimes A}_n$$

5.2 ייצוג מטריציוני

לאחר בחירת בסיסים $\{v_i\}_{i=1}^m$ ל- V ו- $\{w_j\}_{j=1}^n$ ל- W , המטריצה של $A \otimes B$ היא מכפלת הקרוניקר של המטריצות. כלומר, אם $A = (a_{ij})$ ו- $B = (b_{kl})$ אז

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mm}B \end{pmatrix} \in M_{mn \times mn}(\mathbb{C}).$$

יש לזכור שכל בלוק מהצורה $a_{ij}B$ הוא למעשה מטריצה בגודל $n \times n$ של מספרים מרוכבים, ואנו עורמים את כל המטריצות הללו יחד.

דוגמה (שני קיוביטים). בבסיס $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$:

$$(X \otimes I) |00\rangle = |10\rangle, \quad (X \otimes I) |01\rangle = |11\rangle,$$

ואילו

$$(I \otimes Z) |01\rangle = -|01\rangle, \quad (I \otimes Z) |11\rangle = -|11\rangle.$$

חשוב לזכור: כשם שלא כל וקטור ב- $V \otimes W$ הוא מן הצורה $v \otimes w$ – וקטור כללי הוא צירוף ליניארי של כאלה – כך גם לא כל אופרטור על $V \otimes W$ מתפצל כמכפלה $A \otimes B$. דוגמה לכך תופיע בהמשך.

6 למה מכפלה טנזורית ולא קרטזית?

המכפלה המוכרת מאלגברה ליניארית, ואף מתורת הקבוצות, היא המכפלה הקרטזית. למרחבים וקטוריים V, W מעל אותו שדה F נגדיר

$$V \times W = \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\},$$

עם הפעולות

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2), \quad \lambda \cdot (v, w) = (\lambda v, \lambda w).$$

זהו מרחב וקטורי (ואף איזומורפי לסכום הישיר $V \oplus W$); אם V, W מממד סופי נקבל

$$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W.$$

מדוע בתורת הקוונטים זו אינה המכפלה המתאימה? אינטואיטיבית, $V \times W$ "מדביקה" וקטורים זה לצד זה, בעוד שמצב של מערכת מורכבת צריך לתאר יחסי תלות/שזירה בין שני תת-המערכות. פורמלית:

- שיקולי ממד: עבור מרחבי הילברט V, W של תת-מערכות שונות, מרחב המצבים המשותף צריך להיות בממד $\dim V \cdot \dim W$ (מספר המצבים הבסיסיים מוכפל), בעוד ש- $V \times W$ נותן סכום $\dim V + \dim W$ בלבד.

- שזירה: ב- $V \times W$ כל מצב הוא זוג (v, w) . אין בו מצבים שאינם מתפרקים כך, בעוד שבפיזיקה קוונטית יש מצבים שזורים (כמו $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$) שאינם פירוק של וקטור מ- V ווקטור מ- W .

- אופרטורים מקומיים: פעולות מקומיות אמורות לפעול כ- $A \otimes I$ ו- $I \otimes B$. במכפלה הקרטזית אין ייצוג טבעי של ההרכבה הטנזורית הזו.

דוגמה: אם $V = W = \mathbb{C}^2$ עם בסיס חישובי $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ אז

$$\underbrace{V \times W}_{\cong V \oplus W} : \{(|0\rangle, 0), (|1\rangle, 0), (0, |0\rangle), (0, |1\rangle)\}$$

ואילו

$$V \otimes W : \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$$

המצב השזור $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ קיים ב- $V \otimes W$ אך אינו מתאים לזוג (v, w) ב- $V \times W$.