

ניסוי הפצצה של אליצור-ויידמן

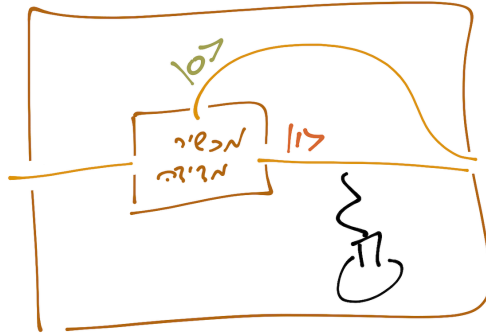
ביחידה זו נדון בניסוי מחשבתי מפורסם, המכונה "ניסוי הפצצה" של אליצור-ויידמן. הרעיון פורסם בשנת 1993 בידי הפיזיקאים הישראלים אבשלום אליצור ולב ויידמן, והוא מדגים תופעה המכונה מדידה ללא אינטראקציה, interaction-free measurement. באופן מפתיע, אפשר לעתים לזהות את נוכחותה של פצצה רגישה לאור בלי להפעיל אותה. בתיאור האופטי, בריצות המוצלחות מזהים את הפצצה בלי שהפוטון ייבלע בה. אין פירוש הדבר שנוכחות הפצצה אינה משפיעה על הניסוי; להפך, ההשפעה הזו היא שמאפשרת לזהות אותה.

אף שהרעיון הוצג כניסוי מחשבתי, עקרונותיו הודגמו גם במעבדה באמצעות מערכות אופטיות. נציג תחילה את הגרסה הבסיסית, ולאחר מכן גרסה משופרת המבוססת על אפקט זנו הקוונטי. השיפור, שהוצע בידי פול קוויאט ועמיתיו בשנת 1995, מאפשר להקטין כרצוננו את הסיכון לפיצוץ במודל האידאלי. נשתמש בשפה המופשטת של קיוביטים, כך שלא נצטרך להכיר את המכשור האופטי.

1 הבעיה

ברגש חשוד מוסר לכם "קופסה שחורה" שאי אפשר להציץ לתוכה. לקופסה יש כניסה ויציאה לקיוביט, למשל כזה הממומש באמצעות פוטון. ידוע לכם שאתם באחד משני מקרים:

- **אין פצצה.** הקופסה אינה עושה דבר, והקיוביט יוצא בדיוק במצב שבו נכנס.
 - **יש פצצה.** פעולת הקופסה מתוארת באמצעות מדידה בבסיס החישובי. אם מתקבלת התוצאה 0, הקיוביט יוצא במצב $|0\rangle$ ושום דבר נוסף אינו קורה. אם מתקבלת התוצאה 1, הפצצה מתפוצצת והניסוי מסתיים.
- לשם הדרמטיות, נניח שהפיצוץ כולל גם אתכם. לכן תרצו מאוד להימנע מפיצוץ. כדי לקשור את התיאור המופשט לניסוי האופטי, אפשר לחשוב על מצבי הבסיס כעל שני מסלולים: במסלול $|0\rangle$ הפוטון עוקף את הפצצה, ובמסלול $|1\rangle$ הוא פוגע בה ונבלע, אם היא קיימת. העובדה שלא התרחש פיצוץ מתאימה לענף שבו הקיוביט יוצא במצב $|0\rangle$.
- נניח שאפשר להעביר את אותו הקיוביט דרך הקופסה כמה פעמים, ולהפעיל עליו שערים בין המעברים. כרגיל, ננתח את המודל האידאלי ונתעלם מרעש ומאובדן שאינו נגרם מן הפצצה.
- במודל הקלאסי המקביל אין הרבה מה לעשות. אם נשלח ביט שערכו 0, נקבל אותה התנהגות בשני המקרים ולא נלמד דבר. אם נשלח 1 ובאמת יש פצצה, היא תתפוצץ: "הניתוח הצליח והחולה מת". גם הטלות מטבע אינן עוזרות כאן. כל עוד שלחנו רק אפסים לא נוכל להבחין בין המקרים, ואם שלחנו אחד כשיש פצצה, לא נשרוד כדי לדווח על התגלית. בפרט, אי אפשר לאשר בוודאות שיש פצצה ולצאת מזה בשלום.



נראה שהמצב הקוונטי שונה. תחילה נצליח לפעמים לזהות פצצה בלי להפעיל אותה. בהמשך נבנה פרוצדורה שבכל ריצה המסתיימת ללא פיצוץ מכריעה נכון אם יש פצצה, ושבה הסתברות הפיצוץ ניתנת להקטנה כרצוננו. המחיר יהיה מספר גדול יותר של מעברים דרך הקופסה.

2 זיהוי פצצה: הגרסה הבסיסית

כצעד ראשון נשלח אל הקופסה קיוביט במצב

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle,$$

ואם יצא בשלום, נמדוד אותו בבסיס $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

אם אין פצצה, הקיוביט עובר ללא שינוי ויוצא במצב $|+\rangle$. לכן נקבל את התוצאה $+$ בוודאות. מה קורה אם יש פצצה?

במקרה הזה, המדידה בתוך הקופסה נותנת את התוצאה 1 בהסתברות $1/2$, ואז הפצצה מתפוצצת. בהסתברות הנותרת מתקבלת התוצאה 0, והקיוביט יוצא במצב $|0\rangle$. מאחר ש-

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle,$$

המדידה ביציאה מחזירה $+$ או $-$ בהסתברויות שוות, בהינתן שהגענו אליה בשלום.

לכן, כאשר יש פצצה, שלוש האפשרויות הן:

- בהסתברות $1/2$ הפצצה מתפוצצת.
- בהסתברות $1/4$ שורדים ומקבלים $-$. מכיוון שהתוצאה הזו אינה אפשרית כשאין פצצה, זיהינו את הפצצה בוודאות בלי להפעיל אותה.

• בהסתברות $1/4$ שורדים ומקבלים $+$. התוצאה הזו אפשרית גם כשיש פצצה וגם כשאין פצצה, ולכן היא אינה מכריעה.

זהו הדיוק החשוב בפרוצדורה: לא נכריז "אין פצצה" בעקבות התוצאה $+$, אלא "לא הוכרעה השאלה". התוצאה $-$, לעומת זאת, היא אישור חד-משמעי לקיומה של הפצצה. אם יש פצצה, ההסתברות לאישור כזה בריצה אחת היא $1/4$, או $1/2$ אם מתנים בכך ששרדנו.

כבר יש כאן משהו שלא הצלחנו לעשות במודל הקלאסי. אבל סיכוי של חצי לשרוד אינו מזהיר, גם אם הוא עדיף על סיכוי אפס. כעת נראה כיצד אפשר לשפר אותה, ובדרך גם להיפטר מן התוצאה שאינה מכריעה.

3 זיהוי פצצה: סיבובים קטנים ומעברים חוזרים

בגרסה הבסיסית הכנסנו לקופסה קיוביט במצב $|+\rangle$. במישור האמפליטודות הממשיות, זהו וקטור בזווית 45° מן הציר "הבטוח" $|0\rangle$, והסיכון לפיצוץ הוא מיד $1/2$. הרעיון כעת הוא להיות עדינים יותר: לבצע בכל פעם סיבוב קטן בלבד מן המצב הבטוח.

נגדיר את שער הסיבוב

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

זוהי מטריצה אוניטרית, ומתקיים

$$R_\theta^\dagger = R_{-\theta}, \quad R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}.$$

בפרט,

$$R_{\pi/2} |0\rangle = |1\rangle.$$

3.1 מה קורה בצעד אחד?

נתחיל במצב $|0\rangle$, נפעיל את R_θ ונעביר את הקיוביט דרך הקופסה. המצב בכניסה אליה הוא

$$R_\theta |0\rangle = \cos \theta |0\rangle + \sin \theta |1\rangle.$$

אם יש פצצה, ההסתברות לפיצוץ היא $\sin^2 \theta$. אם לא התפוצצנו, המצב ביציאה הוא שוב $|0\rangle$. לעומת זאת, אם אין פצצה, הקיוביט יוצא במצב המסובב ללא שינוי נוסף.

לזוויות קטנות, ברדיאנים, $\sin \theta \approx \theta$, ולכן הסיכון לפיצוץ הוא בקירוב θ^2 . לצורך חסם מדויק, די באי-שוויון

$$0 \leq \sin \theta \leq \theta \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

שממנו נקבל $\sin^2 \theta \leq \theta^2$. זהו לב הרעיון: הסיבוב הוא מסדר גודל של הזווית, אבל הסיכון הכרוך בו הוא מסדר גודל של ריבוע הזווית.

3.2 האלגוריתם

נבחר מספר שלם $n \geq 2$ ונגדיר

$$\theta = \frac{\pi}{2n}.$$

נבצע את הצעדים הבאים:

1. נאתחל קיוביט למצב $|0\rangle$.
2. נחזור n פעמים על הפעולה: הפעלת R_θ והעברת הקיוביט דרך הקופסה. אם הקיוביט יצא בשלום, נמשיך עם אותו קיוביט לסבב הבא.
3. לאחר המעבר האחרון נמדוד בבסיס החישובי. אם קיבלנו 0, נכריז "יש פצצה"; אם קיבלנו 1, נכריז "אין פצצה".

3.3 מדוע התשובה נכונה בכל פעם ששורדים?

אם אין פצצה, הקופסה אינה משנה את המצב. לכן הסיבובים מצטברים:

$$R_\theta^n |0\rangle = R_{n\theta} |0\rangle = R_{\pi/2} |0\rangle = |1\rangle.$$

המדידה הסופית מחזירה 1 בוודאות, ואנחנו מכריזים נכון שאין פצצה.

אם יש פצצה, בכל סבב שבו שורדים המצב ביציאה מן הקופסה הוא $|0\rangle$. לכן, בהינתן ששרדנו את כל הסבבים, גם המצב הסופי הוא $|0\rangle$. המדידה מחזירה 0 בוודאות, ואנחנו מכריזים נכון שיש פצצה. כלומר, האלגוריתם אינו טועה באף ריצה המסתיימת ללא פיצוץ. נותר לבדוק כמה מסוכן להגיע לסיומה של ריצה כזו.

3.4 ההסתברות לפיצוץ

נניח מעתה שיש פצצה. בהינתן ששרדנו עד תחילתו של סבב כלשהו, אנחנו מתחילים אותו במצב $|0\rangle$, ולכן ההסתברות המותנית לשרוד גם אותו היא $\cos^2 \theta$. מכפל של הסתברויות מותנות נקבל שההסתברות לשרוד את כל התהליך היא

$$(\cos^2 \theta)^n = \cos^{2n} \left(\frac{\pi}{2n} \right).$$

אם נסמן את ההסתברות הפיצוץ הכוללת ב- p_n , הרי שבדיוק

$$p_n = 1 - \cos^{2n} \left(\frac{\pi}{2n} \right).$$

כדי לחסום את ההסתברות הזו, אפשר להשתמש בחסם האיחוד. נסמן ב- E_k את המאורע שהפיצוץ מתרחש בסבב k . כדי שזה יקרה צריך קודם לשרוד את $k - 1$ הסבבים הקודמים, ולכן

$$\Pr[E_k] = (\cos^2 \theta)^{k-1} \sin^2 \theta \leq \sin^2 \theta \leq \theta^2.$$

מכאן

$$p_n = \Pr\left[\bigcup_{k=1}^n E_k\right] \leq \sum_{k=1}^n \Pr[E_k] \leq n\theta^2 = \frac{\pi^2}{4n}.$$

אין צורך להניח שהמאורעות בלתי תלויים; למעשה, מאורעות הפיצוץ בסבבים שונים זרים זה לזה.

לכן, לכל $0 < \varepsilon < 1$, הבחירה

$$n = \left\lceil \frac{\pi^2}{4\varepsilon} \right\rceil$$

מבטיחה הסתברות פיצוץ של לכל היותר ε . כשאין פצצה, התהליך מסתיים תמיד בתשובה הנכונה. כשיש פצצה, הוא מזהה אותה בלי להפעיל אותה בהסתברות של לפחות $1 - \varepsilon$.

התופעה הזו היא ביטוי לאפקט זנו הקוונטי: המדידות החוזרות מעכבות את השינוי במצב. בלי פצצה, הסיכויים הקטנים מצטברים לסיכוב של רבע מעגל. עם פצצה, כל מעבר ששרדנו מחזיר אותנו למצב ההתחלתי, ואת הסיכון המצטבר אפשר להקטין באמצעות חלוקת הסיכוב למספר גדול של צעדים קטנים. במונחים מתמטיים, הזוויות מצטברות לינארית, ואילו המחיר ההסתברותי בכל צעד הוא ריבועי. לא רע בשביל קיוביט אחד.