אלגוריתמים קוונטיים סמסטר סתיו 2026-7

תרגיל בית מספר 1

שאלות 1, 2, 3 ו-7 הן שאלות לתרגול עצמי. מומלץ מאוד (!) לפתור אותן אך לא תישאלו עליהן. תישאלו על אחת או שתיים מבין השאלות 4, 5, 6 ו-8.

1 שאלה 1 - שאלה לתרגול עצמי

כתבו מחדש את הביטויים, המשוואות והטענות הבאים תוך שימוש רב ככל האפשר בסימון דיראק. נסו להיעזר במשמעותם כדי למצוא עבורם תיאור קצר בסימון זה.

1. $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}0&5&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
4. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$
5. $$\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$
6. מטריצת הזהות Id_n.
7. הוכיחו: $\forall v\in V,\ \langle v,v\rangle\geq 0$ (כלומר, המכפלה הפנימית היא מספר ממשי אי־שלילי).

8. לכל שתי מטריצות $A \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ ו־$B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ מתקיים

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

2 שאלה 2 - שאלה לתרגול עצמי

מהו הקשר בין הביטויים בכל אחד מהסעיפים הבאים?

1. לכל $v, w \in V$, מהו הקשר בין $\langle v|w\rangle$ לבין $\langle w|v\rangle$?
2. לכל $v \in V$, מהו הקשר בין $\langle v|$ לבין $|v\rangle$?
3. לכל שני בסיסים אורתונורמליים $v_1, \ldots, v_n$ ו־$w_1, \ldots, w_n$ של V, מהו הקשר בין $\sum_{i=1}^{n} |v_i\rangle\langle w_i|$ לבין $\sum_{i=1}^{n} |w_i\rangle\langle v_i|$?
4. לכל $v, w \in V$ ולמטריצות A, B, C בממדים מתאימים, מהו הקשר בין

$$((\langle v| A)B)C)\,|w\rangle\,, \qquad \langle v|\,(A(B(C\,|w\rangle))), \qquad \langle v|\,(((AB)C)\,|w\rangle)?$$

3 שאלה 3 - שאלה לתרגול עצמי

הוכיחו את הטענות שימוש רב ככל האפשר בסימון דיראק.

1. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים עבור אופרטור לינארי $U \in L(\mathbb{C}^d)$ על מרחב מכפלה פנימית מרוכב מממד סופי:

   (א) $U^\dagger = U^{-1}$.

   (ב) U משמר נורמות: לכל וקטור $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d$,

   $$\||\psi\rangle\| = \|U\,|\psi\rangle\|.$$

   (ג) U משמר מכפלות פנימיות: לכל זוג וקטורים $|\psi\rangle\,, |\varphi\rangle \in \mathbb{C}^d$,

   $$\langle\psi|\varphi\rangle = \langle\psi|\,U^\dagger U\,|\varphi\rangle\,.$$

   (ד) U מעתיק כל בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי.

   (ה) קיים בסיס אורתונורמלי ש־U מעתיק לבסיס אורתונורמלי.

(ו) העמודות של U מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^d$.

(ז) השורות של U מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^d$.

(ח) ל־U יש בסיס עצמי אורתונורמלי, כלומר בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^d$ המורכב מווקטורים עצמיים של U, והערכים העצמיים המתאימים נמצאים על מעגל היחידה: $e^{i\theta}$, כאשר $\theta \in \mathbb{R}$.

ניתן להשתמש ללא הוכחה במשפט הספקטרלי, הקובע שלאופרטור נורמלי, כלומר אופרטור המקיים $TT^\dagger = T^\dagger T$, יש בסיס עצמי אורתונורמלי.

נזכיר שאופרטור כזה נקרא **אוניטרי** (unitary). במודל החישוב הקוונטי שנלמד, הפעולות על המצבים הקוונטיים הן פעולות אוניטריות ומדידות.

2. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים עבור אופרטור לינארי $H \in L(\mathbb{C}^d)$ על מרחב מכפלה פנימית מרוכב מממד סופי:

(א) $H^\dagger = H$.

(ב) ל־H יש בסיס עצמי אורתונורמלי, כלומר בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^d$ המורכב מווקטורים עצמיים של H, והערכים העצמיים המתאימים הם ממשיים.

אין להשתמש כאן במשפט הספקטרלי. זהו מקרה פשוט יותר, שניתן להיעזר בו להוכחת המשפט הספקטרלי.

נזכיר שאופרטור כזה נקרא **הרמיטי** (Hermitian).

3. הוכיחו ששני וקטורים עצמיים $|\psi\rangle, |\varphi\rangle$ של אופרטור הרמיטי H, המתאימים לערכים עצמיים שונים $\lambda \neq \eta$, חייבים להיות אורתוגונליים:

$$\langle\psi|\varphi\rangle = 0.$$

4 שאלה 4 - שאלה לבדיקה

נרצה להבין את משמעות הפאזה של מצב קוונטי, כלומר את משמעות הכפלתו בסקלר מהצורה $e^{i\theta}$, כאשר $\theta \in \mathbb{R}$.

1. הוכיחו שאם מצב קוונטי של קיודיט[1] $|v\rangle$ הוא כפולה בסקלר של מצב קוונטי אחר $|u\rangle$, כלומר $|v\rangle = \alpha\,|u\rangle$, אז $\alpha = e^{i\theta}$ עבור $\theta \in \mathbb{R}$ כלשהו. נאמר ששני המצבים נבדלים רק בפאזה גלובלית.

[1] קיודיט הוא מעצב קוונטי שמרחב המצבים שלו הוא מממד d, עבור $d \in \mathbb{N}$, בניגוד לקיוביט, שעבורו הממד הוא 2.

2. נתונים שני מצבים של קיודיט, $|u\rangle, |v\rangle$, כמו בסעיף הקודם. הוכיחו שלכל בחירה של בסיס אורתונורמלי, התפלגות תוצאות המדידה של $|u\rangle$ זהה לזו של $|v\rangle$.

3. בעזרת הסעיף הקודם, הסבירו מדוע ביצוע כל פעולה קוונטית על $|u\rangle$ או על $|v\rangle$ יוביל לאותן התפלגויות של תוצאות נצפות. הכוונה היא לתוצאות שאפשר לקבל במעבדה, כלומר לתוצאות המדידות המבוצעות כחלק מהתהליך.

4. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: כתוצאה מהסעיף הקודם, קיוביט במצב

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + |u_2\rangle)$$

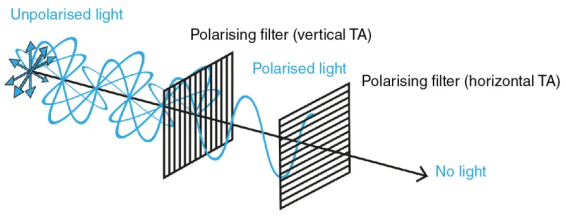
וקיוביט במצב

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + e^{i\theta}|u_2\rangle),$$

כאשר $\theta \in \mathbb{R}$ ו־$|u_1\rangle, |u_2\rangle$ אורתונורמליים, יניבו אותן התפלגויות של תוצאות נצפות בכל פעולה קוונטית. הגורם הסקלרי המכפיל את $|u_2\rangle$ ביחס למקדם של $|u_1\rangle$ נקרא פאזה יחסית.

5 שאלה 5 - שאלה לבדיקה

לאור יש תכונה שנקראת קיטוב. אפשר להתייחס לקיטוב כתכונה קוונטית של פוטונים המתאימה לייצוג קיוביט. בפרט, קיטוב לינארי מתואר באמצעות כיוון במישור הדו־ממדי המאונך לכיוון התקדמות הפוטון (ראו איור 1). מקטבים הם מסננים המעבירים אור המקוטב בכיוון מסוים במישור המסנן, וחוסמים אור המקוטב בכיוון המאונך לו. לכן פעולתם דומה לפעולת המדידה.



איור 1: מקטבים וקיטוב של אור[2]

קיבלנו משרד חדש, שעל חלונו היחיד מותקן מתקן מוזר: שני מקטבים, הראשון בכיוון אנכי והשני, המוצב אחריו, בכיוון אופקי. כתוצאה מכך, שום אור אינו נכנס למשרד!

1. הוכיחו שההסתברות שפוטון יעבור דרך שני המקטבים היא 0.

[2] מקור: https://entokey.com/polarisation/

2. למרבה המזל, יש רווח גדול למדי בין שני המקטבים שבחלון, ובמגירה במשרד מצאנו מקטבים נוספים. נרצה לנצל זאת כדי להכניס מעט אור למשרד.

   נכניס מקטב נוסף בין שני המקטבים הקבועים. נסמן ב־θ את הזווית בין כיוון המקטב החדש לבין הכיוון האנכי. חשבו, כפונקציה של θ, את ההסתברות שפוטון שעבר דרך המקטב הראשון יעבור גם דרך המקטב החדש וגם דרך המקטב האחרון, האופקי. עבור איזו זווית θ ההסתברות מרבית, ומהו ערכה המרבי?

6 שאלה 6 - שאלה לבדיקה

יהי

$$|\psi\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle = \beta_+ |+\rangle + \beta_- |-\rangle$$

מצב של קיוביט. נגדיר את "אי-הוודאות של הביט" להיות:

$$S(|\psi\rangle) := |\alpha_0| + |\alpha_1|,$$

ובאופן דומה נגדיר את "אי-הוודאות של הסימן" להיות:

$$\hat{S}(|\psi\rangle) := |\beta_+| + |\beta_-|.$$

גדלים אלה מודדים את מידת אי־הוודאות לגבי תוצאת מדידה בבסיס המתאים. בשאלה זו נראה גרסה של עקרון אי־הוודאות: אי אפשר לדעת בוודאות את תוצאות המדידה בשני הבסיסים בו־זמנית.

1. חשבו את שתי אי־הוודאויות עבור מצבי הבסיס החישובי ועבור מצבי בסיס הדמרד. כלומר, חשבו את $S(|\psi\rangle), \hat{S}(|\psi\rangle)$ עבור $|\psi\rangle \in \{|0\rangle, |1\rangle, |+\rangle, |-\rangle\}$.
2. מהו טווח הערכים של S ושל $\hat{S}$? מתי מתקבלים ערכי הקצה של הטווח?
3. הראו שהערך המינימלי של הפונקציה

$$f(x) := x^2 + x\sqrt{1-x^2}, \qquad x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right],$$

   הוא 1.

4. הוכיחו חסם תחתון הגדול ממש מ־1 למכפלת אי־הוודאויות

$$S(|\psi\rangle) \cdot \hat{S}(|\psi\rangle).$$

5. הסיקו מהסעיף הקודם חסם תחתון עבור

$$\max\{S(|\psi\rangle), \hat{S}(|\psi\rangle)\},$$

המראה שלפחות אחת משתי התכונות חייבת להיות לא־ודאית. כלומר, לפחות באחד הבסיסים, לשתי תוצאות המדידה יש הסתברות חיובית.

7 שאלה 7 - שאלה לתרגול עצמי

מצב $|\psi\rangle$ נקרא פריד (או לא שזור) אם קיימים מצבים $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ כך ש־

$$|\psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle .$$

מצב שאינו פריד נקרא שזור. אילו מהמצבים הבאים פרידים? הוכיחו את תשובותיכם.

1. $\frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$
2. $\frac{|00\rangle + |01\rangle + |11\rangle}{\sqrt{3}}$
3. $\frac{|00\rangle + i\,|01\rangle + i\,|10\rangle - |11\rangle}{2}$
4. $\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$

8 שאלה 8 - שאלה לבדיקה

1. נניח שמודדים את הקיוביט הראשון בזוג EPR,

$$|EPR\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),$$

בבסיס $\{|u\rangle, |u^{\perp}\rangle\}$. ענו על השאלות הבאות:

(א) מהי ההסתברות לקבל כל אחת מתוצאות המדידה?

(ב) נניח שתוצאת המדידה הייתה $|u\rangle$. מהו מצב הקיוביט השני לאחר המדידה?

(ג) מה משתנה אם מניחים של־$|u\rangle$ יש מקדמים ממשיים בבסיס החישובי? כלומר

$$|u\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle\,, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

2. נבחן את פעולתן של העתקות אוניטריות על מצב הסינגלט.

(א) תהי U מטריצה אוניטרית בגודל 2×2, ויהי $|\Psi^-\rangle$ מצב הסינגלט,

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle).$$

חשבו את $(U \otimes U)\,|\Psi^-\rangle$. כלומר, הפעילו את U על כל אחד משני הקיוביטים של $|\Psi^-\rangle$.

(ב) השתמשו בסעיף הקודם כדי להראות שאם אליס ובוב חולקים מצב סינגלט, אליס יכולה לבצע פעולה על הקיוביט שלה השקולה, עד כדי פאזה גלובלית, לכך שבוב יפעיל על הקיוביט שלו העתקה אוניטרית U לבחירתה. זאת ללא תקשורת עם בוב וללא פעולה על הקיוביט שלו.