

מבחן - מועד א

תאריך: 28/01/2026

סגל הקורס: גיל כהן, יואב גל-צור, מיה שלינגר

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- השימוש בחומר עזר אסור פרט לדף $A4$ דו-צדדי או שני דפי $A4$ חד-צדדיים. לקבוצות B, C ואחרים הזכאים לדף מורחב מותר השימוש בשני דפי $A4$ דו-צדדיים או ארבעה דפי $A4$ חד-צדדיים. השימוש במחשבון אסור.
- את התשובות יש לרשום רק על טופס הבחינה. מחברת הבחינה משמשת כטיוטה ולא תיבדק.
- יש לרשום מספר ת.ז. ומספר מחברת בראש כל אחד מהדפים בטופס.
- המבחן מורכב מ-6 שאלות ושאלת בונוס נוספת לקבוצות B, C . יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות, לבחירתכם, ולכתוב "לא לבדיקה" כתשובה לשאלה שבחרתם שלא לענות עליה. שווי כל שאלה 20 נקודות. במידה ועניתם על כל 6 השאלות, יבדקו 5 שאלות כלשהן (לאו דווקא הראשונות או אלו עם הניקוד הגבוה ביותר), אזי בבקשה המנעו מלעשות כך.
- אלא אם כן נכתב אחרת, יש לתת נימוק קצר לתשובתכם עבור כל שאלה במסגרת המתאימה. במקרים בהם אתם מתבקשים לכתוב הוכחה, יש לכתוב הוכחה מלאה ופורמלית.
- יש לכתוב את כל התשובות במקום המוקצב ובכתב קריא. תשובות ובהן חריגות לא זניחות מהמקום המוקצב, או תשובות הכתובות בכתב קטן באופן קיצוני או לא ברור לא ייקראו ולא יקבלו ניקוד, או שיקבלו ניקוד חלקי בלבד. תשובות שדורשות מאמצים רבים להבנתן גם כן עלולות לגרור הורדת ציון.
- לכן, מומלץ בחום לפתור ראשית במחברת ואז לרשום פתרון מסודר במסגרת. ישנן זוג מסגרות נוספות למקרה הצורך בסוף הטופס.
- ניתן לרשום "אינני יודע/ת" כתשובה לשאלה או סעיף שלה ולקבל 20% מהניקוד. במקרה זה אין להוסיף שום הסבר.
- בתשובות מותר להשאיר סימונים שנלמדו עבור ספירות בסיסיות (עצרת, $S(n, k)$, מקדם בינומי וכדומה), מספרי קטלן (C_n) , דוור שיכור (D_n) , וסימונים נוספים שראינו בהרצאה.
- אלא אם כן נאמר אחרת, מותר להשתמש בכל טענה מההרצאות או התרגולים ללא הוכחה, ובלבד שהיא מצוטטת כראוי.
- בשאלה עם מספר סעיפים, ניתן להשתמש בתשובה מהסעיף הקודם גם אם לא פתרתם אותו. לדוגמה, התשובה של סעיף 2 יכולה להיות התשובה של סעיף 1, בחזקת 3.

בהצלחה!

שאלה 1 (20 נקודות) בשאלה זו נחשב את מספר העצים על קבוצת הצמתים $[n]$ להם בדיוק 3 עלים **ללא שימוש** במשפטים על עצים פורשים שלמדנו בהרצאות.

א. (7 נק') יהי עץ כלשהו עם בדיוק 3 עלים. עבור כל מספר טבעי $k \geq 0$, רשמו את כמות הצמתים בעץ להם דרגה k . לדוגמה: ישנם 0 צמתים מדרגה 0 (כי הגרף קשיר) ו-3 צמתים מדרגה 1 כי יש שלושה עלים. התשובה יכולה להיות תלויה במספר הצמתים n . אין צורך לנמק.

ב. (13 נק') כמה עצים עם בדיוק שלושה עלים מעל קבוצת הצמתים $\{1, \dots, n\}$ קיימים?

תשובה:

שאלה 2 (20 נקודות) יהי n טבעי. כמה גרפים מעל קבוצת הצמתים $[n]$ קיימים בהם אין צומת מבודד? ניתן להשאיר סימן סכימה בתשובה הסופית.

שאלה 3 (20 נקודות) יהי $n \geq 2$. בשאלה זו נמצא, באמצעות פונקציות יוצרות, ביטוי סגור לסכום

$$\sum_{i=1}^n (n-i) \cdot i$$

א. (5 נק') הסבירו כיצד ניתן לקבל את $A(x)$, הפונקציה היוצרת של הסדרה $a_n = n$, מתוך הפונקציה היוצרת $\frac{1}{1-x}$, ומצאו ביטוי מפורש ל $A(x)$:

ב. (5 נק') נמקו מדוע $A(x)^2$ יוצרת את הסדרה $b_n = \sum_{i=1}^n (n-i) \cdot i$.

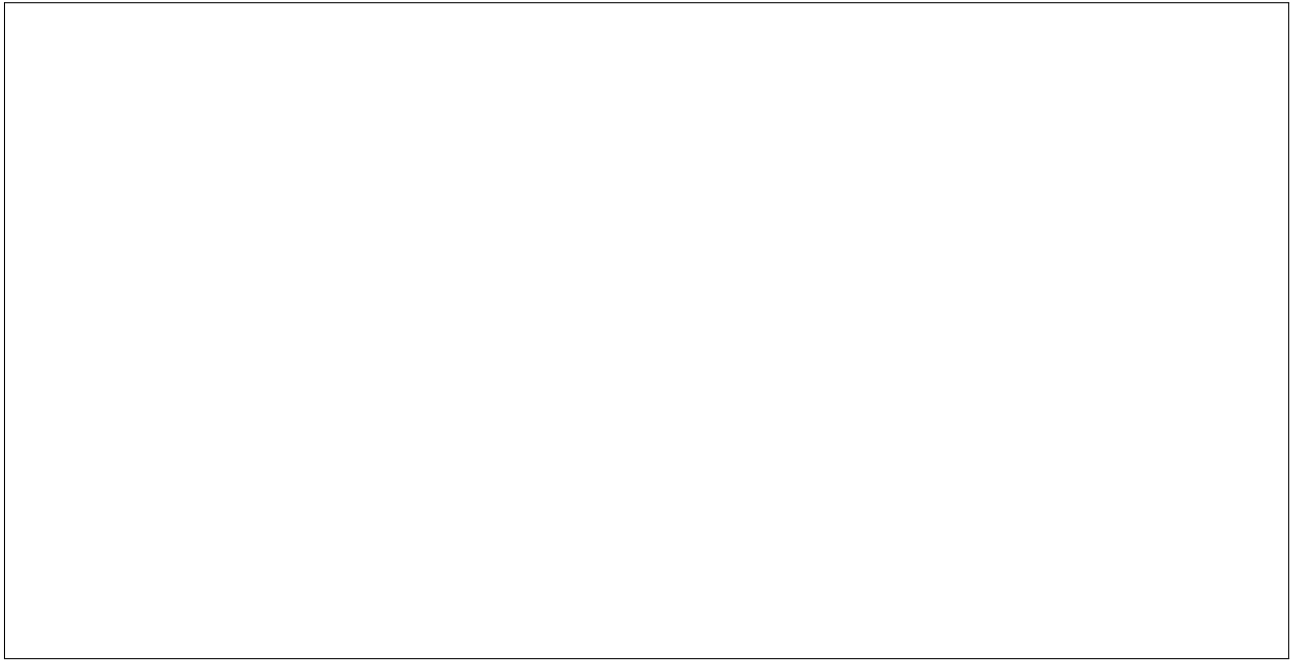
ג. (5 נק') תהי $B(x) = A(x)^2$ הפונקציה היוצרת את הסדרה b_n . רשמו את $B(x)$ ורשמו ביטוי סגור (ללא סכימה) לאיבר הכללי b_n .

ד. (5 נק') ודאו באמצעות הוכחה קומבינטורית כי תשובתכם מהסעיף הקודם זהה לביטוי $\sum_{i=1}^n (n-i) \cdot i$.

שאלה 4 (20 נקודות) יהי $n \geq 0$. יצירה מוזיקלית היא רצף של n תווים מתוך הקבוצה $\{A, B, C, D, E, F, G\}$. יצירה נקראת עשירה ב- C אם היא מתחילה בתו C , מסתיימת ב- C ועבור כל שני תווים סמוכים, לפחות אחד מהם הוא C . לדוגמה: המחרוזת $CFCCGC$ היא עשירה ב- C והמחרוזת $CADCGC$ איננה.

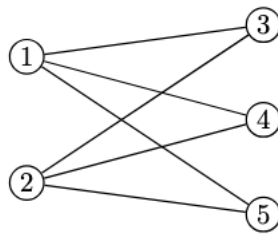
א. (13 נק') מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה למספר היצירות העשירות ב- C מאורך n , לכל $n \geq 0$ טבעי.

ב. (7 נק') פתרו את נוסחת הנסיגה מהסעיף הקודם בעזרת שיטת הפולינום האופייני.



שאלה 5 (20 נקודות) בשאלה זו אין קשר בין שני הסעיפים.

א. (10 נק') חשבו בעזרת משפט קירכהוף את מספר העצים הפורשים של הגרף הבא:





ב. (10 נק') יהיו $0 < k \leq n$. כמה עצים מעל הצמתים $[n]$ מקיימים את התכונה הבאה: תת הגרף המכיל את הצמתים $[k]$ והקשתות המחברות ביניהם הוא עץ?

שאלה 6 (20 נקודות)

א. (8 נק') כתבו יחס סימבולי עבור המחלקה הקומבינטורית הבאה: עצים מושרשים מסודרים (כפי שראינו בהרצאה), בהם לכל צומת שאינה עלה יש או שני בנים או ארבעה בנים. פונקציית הגודל היא מספר הצמתים בעץ.

ב. (5 נק') מצאו משוואה שהפונקציה היוצרת של המחלקה הנ"ל מקיימת.

ג. (7 נק') בעזרת המשפט שלמדנו בהרצאה ובהתבסס על סעיף ב', מצאו קירוב עבור מספר העצים המושרשים המסודרים תחת התנאים הנ"ל בעלי n צמתים.

שאלת בונוס (5 נקודות בונוס לקבוצות B, C) כמה פונקציות מהקבוצה $[k]$ לקבוצה $[n]$ הן חד־חד־ערכיות ומונוטוניות (עולות או יורדות)?

תשובה:

מסגרת נוספת למקרה הצורך:

מסגרת נוספת למקרה הצורך: