

מבחן - מועד ב

תאריך: 25/09/2025

סגל הקורס: מיכל פלדמן, אמיר רובינשטיין, יואב בן שמעון, יואב גלצור, תומר מנקט, מיה שלינגר, איתי תשובה

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- השימוש במחשבון אסור.
- השימוש בחומר עזר אסור פרט לדרך A_4 דו-צדדי או שני דפי A_4 חד-צדדיים. לקבוצות B, C ואחרים הזכאים לדרך מורחב מותר השימוש בשני דפי A_4 דו-צדדיים או ארבעה דפי A_4 חד-צדדיים.
- את התשובות יש לרשום רק על טופס הבחינה. מחברת הבחינה משמשת כטיוטה ולא תיבדק.
- יש לרשום מספר ת.ז. ומספר מחברת בראש כל אחד מהדפים בטופס.
- בטופס 7 עמודים, לא כולל עמוד זה, הכוללים 5 שאלות, ושאלת בונוס נוספת לקבוצות B, C , ועמוד עם מסגרת נוספת למקרה הצורך.
- יש לכתוב את כל התשובות במקום המוקצב ובכתב קריא. תשובות ובהן חריגות לא זניחות מהמקום המוקצב, או תשובות הכתובות בכתב קטן באופן קיצוני או לא ברור לא ייקראו ולא יקבלו ניקוד, או שיקבלו ניקוד חלקי בלבד. תשובות שדורשות מאמצים רבים להבנתן גם כן עלולות לגרור הורדת ציון.
- לכן, מומלץ בחום לפתור ראשית במחברת ואז לרשום פתרון מסודר במסגרת.
- בתשובות מותר להשאיר סימונים שנלמדו עבור ספירות בסיסיות (עצרת, $S(n, k)$, מקדם בינומי וכדומה), מספרי פיבונאצ'י (F_n), מספרי קטלן (C_n), מספרי בל (B_n), מספרי סטירלינג מהסוג השני ($\{n\}_k$), דוור שיכור (D_n), וסימונים נוספים שראינו בהרצאה.
- מותר להשתמש בכל טענה מההרצאות ללא הוכחה, ובלבד שהיא מצוטטת כראוי.
- בשאלה עם מספר סעיפים, ניתן להשתמש בתשובה מהסעיף הקודם גם אם לא פתרתם אותו. לדוגמה, התשובה של סעיף 2 יכולה להיות התשובה של סעיף 1, בחזקת 3.
- אין לרשום נימוק בשאלות בהן יש לספק תשובה סופית בלבד.
- בשאלות בחירה מרובה יש לבחור תשובה אחת בלבד.
- בשאלות שאינן שאלות בחירה מרובה ("פתוחות") ניתן לרשום "אינני יודע/ת" כתשובה לשאלה או סעיף שלה, פרט לשאלת הבונוס, ולקבל 20% מהניקוד. במקרה זה אין להוסיף שום הסבר.

בהצלחה!

שאלה 1 (5 נקודות בונים לקבוצות (B, C) כמה וקטורים $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ישנם כך שכל קואורדינטה היא מספר שלם גדול ממש מאפס וגם סכום הקואורדינטות קטן או שווה ל- n ? הניחו כי $1 \leq k \leq n$.

תשובה סופית:

שאלה 2 (20 נקודות)

יהיו $0 < d < n$ טבעיים ותהי $V = \{0, 1, 2\}^n$ קבוצת המחרוזות הטרינאריות מאורך n . נגדיר פונקציית מרחק בין כל שתי מחרוזות $u, v \in V$:

$$\Delta(u, v) = |\{i \in [n] \mid u_i \neq v_i\}|$$

כאשר u_i הוא התו ה- i במחרוזת u . למשל, אם $n = 4$ אז $\Delta(0000, 1111) = 4$ וכן $\Delta(1010, 1220) = 2$.

נתבונן בגרף $G = (V, E)$ שבו $V = \{0, 1, 2\}^n$, ולכל $u, v \in V$ מתקיים: $\{u, v\} \in E$ אם ורק אם $1 \leq \Delta(u, v) \leq d$.

א. (7 נק') מהי הדרגה של הקודקוד המיוצג ע"י המחרוזת שכולה אפסים? בטאו באמצעות n ו- d במידת הצורך. רשמו תשובה סופית בלבד. ניתן להשאיר סימן סכימה בתשובה הסופית.

תשובה סופית:

ב. (6 נק') נסמן ב- X את התשובה לסעיף הקודם. מהו מספר הקשתות בגרף?

$$n \cdot \sum_{k=1}^d \binom{n}{k} 3^k \quad (\text{ה})$$

$$\frac{3X}{2} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{X}{2k} \quad (\text{א})$$

$$\frac{3X}{2} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{X}{k} \quad (\text{ב})$$

$$3 \cdot 2^{n-2} \cdot X + (3^n - 2^n) \frac{2X}{3} \quad (\text{ו})$$

$$\frac{3^{n-1}}{2} \cdot X \quad (\text{ג})$$

$$\frac{1}{2} (2^n \cdot X + (3^n - 2^n) \frac{2X}{3}) \quad (\text{ז})$$

$$\frac{3^n}{2} \cdot X \quad (\text{ד})$$

$$\frac{1}{2} (2^n \cdot X + (3^n - 2^n) \frac{X}{2}) \quad (\text{ח})$$

ג. (7 נק') מהו האורך של מסלול קצר ביותר בין הקודקוד $0 \dots 0$ (המחרוזת שכולה אפסים) לקודקוד $2 \dots 2$ (המחרוזת שכולה הספרה 2)? בטאו באמצעות n ו- d במידת הצורך. רשמו תשובה סופית בלבד. תשובה עם סימן סכימה תקבל ניקוד חלקי, אם בכלל.

תשובה סופית:

שאלה 3 (20 נקודות)

א. (10 נק') המספרים הטבעיים מ-1 עד 50 שובצו בטבלה בגודל 5×10 עפ"י הסדר, כמתואר בציור.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

בסעיפים (1)-(2) שלהלן, רשמו תשובה סופית בלבד (אין צורך לנמק). תשובות עם סימן סכימה יקבלו ניקוד חלקי, אם בכלל.

(1) בכמה דרכים ניתן לשבץ את המספרים בטבלה, כך שכל שני מספרים שהופיעו באותה שורה בסידור המקורי יופיעו באותה שורה גם בסידור החדש? (כלומר, אם שניהם הופיעו בשורה i בסידור המקורי, אז בסידור החדש שניהם יופיעו בשורה j , כאשר j רשאי, אך לא חייב, להיות שונה מ- i).

תשובה סופית:

(2) בכמה דרכים ניתן לשבץ את המספרים בטבלה, כך שכל שני מספרים שהופיעו באותה שורה בסידור המקורי יופיעו באותה שורה גם בסידור החדש, אך אף מספר לא יישאר בשורה בה הופיע במקור? (כלומר, אם שני מספרים הופיעו בשורה i בסידור המקורי, אז שניהם נדרשים להופיע בשורה j , כאשר $j \neq i$).

תשובה סופית:

ב. (10 נק') הוכיחו שבכל שיבוץ של המספרים הטבעיים מ-1 עד 50 בטבלה, קיימים $1 \leq i \leq j \leq 10$ כך שסכום המספרים המשובצים בעמודות i עד j (כולל) מתחלק ב-10 ללא שארית. אם משתמשים בעקרון שובך היונים, יש לציין במפורש מי השובכים ומי היונים.

תשובה:

שאלה 4 (20 נקודות)

בחפיסת קלפים סטנדרטית יש 52 קלפים: 13 קלפים מסוג יהלום (אדום), 13 קלפים מסוג לב (אדום), 13 קלפים מסוג תלתן (שחור), 13 קלפים מסוג עלה (שחור). מכל סוג יש 13 קלפים שונים שממוספרים 1, ..., 13. שליפת קוסס היא שליפת כל הקלפים מהחפיסה אחד אחרי השני (ללא החזרות) כך שבכל שלב מתקיים:

- כמות הקלפים האדומים שנשלפו $\leq$ כמות הקלפים השחורים שנשלפו.
- כמות הלבבות שנשלפו $\leq$ כמות היהלומים שנשלפו.
- כמות התלתנים שנשלפו $\leq$ כמות העלים שנשלפו.

א. (6 נק') כמה שליפות קוסס שונות ישנן? רשמו תשובה סופית בלבד. תשובה עם סימן סכימה תקבל ניקוד חלקי, אם בכלל.

תשובה סופית:

ב. (7 נק') כמה שליפות קוסס מקיימות בנוסף שארבעת הקלפים הראשונים חולקים את אותו המספר (לדוגמה, כל ארבעת הקלפים הראשונים הם קלפים עם המספר 5)? רשמו תשובה סופית בלבד. תשובה עם סימן סכימה תקבל ניקוד חלקי, אם בכלל.

תשובה סופית:

ג. (7 נק') (בסעיף זה אין להתייחס לתנאי בסעיף ב). כמה שליפות קוסס מקיימות בנוסף כי מספרו של הקלף הראשון שנשלף גדול או שווה למספרו של הקלף האחרון? רשמו תשובה סופית בלבד. תשובה עם סימן סכימה תקבל ניקוד חלקי, אם בכלל.

תשובה סופית:

שאלה 5 (20 נקודות)

לכל n טבעי וחיובי נסמן ב- a_n את מספר המחרוזות ב- $\{0, 1, 2\}^n$ המתחילות בספרה 0, מסתיימות בספרה 2 ולא מכילות אף אחד מהרצפים 00, 10, 21 ו-22. לדוגמא: המחרוזת 02012 היא חוקית והמחרוזת 0122 איננה חוקית. מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה מספיקים עבור a_n . נמקו את תשובתכם.

נוסחת נסיגה (תשובה סופית):

תנאי התחלה (תשובה סופית):

הסבר:

שאלה 6 (20 נקודות)

א. (10 נק') נתון כי הפונקציה היוצרת של הסדרה a_n היא $\lambda n \in \mathbb{N}$.

$$f(x) = \left(\frac{1-x^9}{1-x} \right)^{30}$$

מצאו את a_{20} . נמקו את תשובתכם.

תשובה:

ב. (10 נק') בכמה מספרים טבעיים בעלי 30 ספרות, הספרה 0 לא מופיעה כלל וסכום הספרות הוא 50? נמקו את תשובתכם.

תשובה: