

מבחן - מועד ב - פתרון

תאריך: 25/09/2025

סגל הקורס: מיכל פלדמן, אמיר רובינשטיין, יואב בן שמעון, יואב גלצור, תומר מנקט, מיה שלינגר, איתי תשובה

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- השימוש במחשבון אסור.
- השימוש בחומר עזר אסור פרט לדרך A_4 דו-צדדי או שני דפי A_4 חד-צדדיים. לקבוצות B, C ואחרים הזכאים לדרך מורחב מותר השימוש בשני דפי A_4 דו-צדדיים או ארבעה דפי A_4 חד-צדדיים.
- את התשובות יש לרשום רק על טופס הבחינה. מחברת הבחינה משמשת כטיוטה ולא תיבדק.
- יש לרשום מספר ת.ז. ומספר מחברת בראש כל אחד מהדפים בטופס.
- בטופס 8 עמודים, לא כולל עמוד זה, הכוללים 5 שאלות, ושאלת בונוס נוספת לקבוצות B, C , ועמוד עם מסגרת נוספת למקרה הצורך.
- יש לכתוב את כל התשובות במקום המוקצב ובכתב קריא. תשובות ובהן חריגות לא זניחות מהמקום המוקצב, או תשובות הכתובות בכתב קטן באופן קיצוני או לא ברור לא ייקראו ולא יקבלו ניקוד, או שיקבלו ניקוד חלקי בלבד. תשובות שדורשות מאמצים רבים להבנתן גם כן עלולות לגרור הורדת ציון.
- לכן, מומלץ בחום לפתור ראשית במחברת ואז לרשום פתרון מסודר במסגרת.
- בתשובות מותר להשאיר סימונים שנלמדו עבור ספירות בסיסיות (עצרת, $S(n, k)$, מקדם בינומי וכדומה), מספרי פיבונאצ'י (F_n) , מספרי קטלן (C_n) , מספרי בל (B_n) , מספרי סטירלינג מהסוג השני $\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \}$, דורך שיכור (D_n) , וסימונים נוספים שראינו בהרצאה.
- מותר להשתמש בכל טענה מההרצאות ללא הוכחה, ובלבד שהיא מצוטטת כראוי.
- בשאלה עם מספר סעיפים, ניתן להשתמש בתשובה מהסעיף הקודם גם אם לא פתרם אותו. לדוגמה, התשובה של סעיף 2 יכולה להיות התשובה של סעיף 1, בחזקת 3.
- אין לרשום נימוק בשאלות בהן יש לספק תשובה סופית בלבד.
- בשאלות בחירה מרובה יש לבחור תשובה אחת בלבד.
- בשאלות שאינן שאלות בחירה מרובה ("פתוחות") ניתן לרשום "אינני יודע/ת" כתשובה לשאלה או סעיף שלה, פרט לשאלת הבונוס, ולקבל 20% מהניקוד. במקרה זה אין להוסיף שום הסבר.

בהצלחה!

שאלה 1 (5 נקודות בונים לקבוצות B, C) כמה וקטורים $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ישנם כך שכל קואורדינטה היא מספר שלם גדול ממש מאפס וגם סכום הקואורדינטות קטן או שווה ל- n ? הניחו כי $1 \leq k \leq n$.

תשובה סופית: נחלק $n - k$ כדורים ל- $k + 1$ תאים $S(k + 1, n - k) = \binom{n}{k}$

שאלה 2 (20 נקודות)

יהיו $0 < d < n$ טבעיים ותהי $V = \{0, 1, 2\}^n$ קבוצת המחרוזות הטרינאריות מאורך n . נגדיר פונקציית מרחק בין כל שתי מחרוזות $u, v \in V$:

$$\Delta(u, v) = |\{i \in [n] \mid u_i \neq v_i\}|$$

כאשר u_i הוא התו ה- i במחרוזת u . למשל, אם $n = 4$ אז $\Delta(0000, 1111) = 4$ וכן $\Delta(1010, 1220) = 2$.

נתבונן בגרף $G = (V, E)$ שבו $V = \{0, 1, 2\}^n$, ולכל $u, v \in V$ מתקיים: $\{u, v\} \in E$ אם ורק אם $1 \leq \Delta(u, v) \leq d$.

א. (7 נק') מהי הדרגה של הקודקוד המיוצג ע"י המחרוזת שכולה אפסים? בטאו באמצעות n ו- d במידת הצורך. רשמו תשובה סופית בלבד. ניתן להשאיר סימן סכימה בתשובה הסופית.

תשובה סופית:

$$\sum_{k=1}^d \binom{n}{k} \cdot 2^k$$

ב. (6 נק') נסמן ב- X את התשובה לסעיף הקודם. מהו מספר הקשתות בגרף?

$$n \cdot \sum_{k=1}^d \binom{n}{k} 3^k \quad (\text{ה})$$

$$\frac{3X}{2} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{X}{2^k} \quad (\text{א})$$

$$\frac{3X}{2} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{X}{k} \quad (\text{ב})$$

$$3 \cdot 2^{n-2} \cdot X + (3^n - 2^n) \frac{2X}{3} \quad (\text{ו})$$

$$\frac{3^{n-1}}{2} \cdot X \quad (\text{ג})$$

$$\frac{1}{2}(2^n \cdot X + (3^n - 2^n) \frac{2X}{3}) \quad (\text{ז})$$

$$\boxed{\frac{3^n}{2} \cdot X} \quad (\text{ד})$$

$$\frac{1}{2}(2^n \cdot X + (3^n - 2^n) \frac{X}{2}) \quad (\text{ח})$$

ג. (7 נק') מהו האורך של מסלול קצר ביותר בין הקודקוד $0 \dots 0$ (המחרוזת שכולה אפסים) לקודקוד $2 \dots 2$ (המחרוזת שכולה הספרה 2)? בטאו באמצעות n ו- d במידת הצורך. רשמו תשובה סופית בלבד. תשובה עם סימן סכימה תקבל ניקוד חלקי, אם בכלל.

תשובה סופית:

$$\lceil n/d \rceil$$

שאלה 3 (20 נקודות)

א. (10 נק') המספרים הטבעיים מ-1 עד 50 שובצו בטבלה בגודל 5×10 עפ"י הסדר, כמתואר בציור.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

בסעיפים (1)-(2) שלהלן, רשמו תשובה סופית בלבד (אין צורך לנמק). תשובות עם סימן סכימה יקבלו ניקוד חלקי, אם בכלל.

(1) בכמה דרכים ניתן לשבץ את המספרים בטבלה, כך שכל שני מספרים שהופיעו באותה שורה בסידור המקורי יופיעו באותה שורה גם בסידור החדש? (כלומר, אם שניהם הופיעו בשורה i בסידור המקורי, אז בסידור החדש שניהם יופיעו בשורה j , כאשר j רשאי, אך לא חייב, להיות שונה מ- i).

תשובה סופית:

$$5! \cdot (10!)^5$$

(2) בכמה דרכים ניתן לשבץ את המספרים בטבלה, כך שכל שני מספרים שהופיעו באותה שורה בסידור המקורי יופיעו באותה שורה גם בסידור החדש, אך אף מספר לא יישאר בשורה בה הופיע במקור? (כלומר, אם שני מספרים הופיעו בשורה i בסידור המקורי, אז שניהם נדרשים להופיע בשורה j , כאשר $j \neq i$).

תשובה סופית:

$$D_5 \cdot (10!)^5$$

ב. (10 נק') הוכיחו שבכל שיבוץ של המספרים הטבעיים מ-1 עד 50 בטבלה, קיימים $1 \leq i \leq j \leq 10$ כך שסכום המספרים המשובצים בעמודות i עד j (כולל) מתחלק ב-10 ללא שארית. אם משתמשים בעקרון שובך היונים, יש לציין במפורש מי השובכים ומי היונים.

תשובה: הוכחה בעזרת עקרון שובך היונים: לכל $k \in [10]$ נסמן ב- S_k את סכום המספרים המשובצים ב- k העמודות הראשונות. נסמן ב- $\overline{S_k}$ את שארית החלוקה של S_k ב-10. אז

$$\{\overline{S_1}, \overline{S_2}, \dots, \overline{S_{10}}\} \subseteq \{0, 1, \dots, 9\}$$

אם יש $k \in [10]$ כך ש- $\overline{S_k} = 0$, אז ניקח $i = 1, j = k$ ונסיים. אחרת,

$$\{\overline{S_1}, \overline{S_2}, \dots, \overline{S_{10}}\} \subseteq [9]$$

ומעיקרון שובך היונים יש $m \in [9]$ ו- $1 \leq i < j \leq 10$ כך ש- $\overline{S_i} = \overline{S_j} = m$. אם כך,

$$\overline{S_j - S_i} = \overline{S_j} - \overline{S_i} = 0$$

ומכאן שסכום המספרים המשובצים בעמודות $i + 1$ עד j (כולל) מתחלק ב-10 ללא שארית.

שאלה 4 (20 נקודות)

בחפיסת קלפים סטנדרטית יש 52 קלפים: 13 קלפים מסוג יהלום (אדום), 13 קלפים מסוג לב (אדום), 13 קלפים מסוג תלתן (שחור), 13 קלפים מסוג עלה (שחור). מכל סוג יש 13 קלפים שונים שממוספרים $1, \dots, 13$. שליפת קוסס היא שליפת כל הקלפים מהחפיסה אחד אחרי השני (ללא החזרות) כך שבכל שלב מתקיים:

- כמות הקלפים האדומים שנשלפו $\leq$ כמות הקלפים השחורים שנשלפו.
- כמות הלבבות שנשלפו $\leq$ כמות היהלומים שנשלפו.
- כמות התלתנים שנשלפו $\leq$ כמות העלים שנשלפו.

א. (6 נק') כמה שליפות קוסס שונות ישנן? רשמו תשובה סופית בלבד. תשובה עם סימן סכימה תקבל ניקוד חלקי, אם בכלל.

תשובה סופית: $C_{26} \cdot C_{13} \cdot C_{13} \cdot (13!)^4$

הסבר: נבנה שליפה חוקית בעזרת חוק הכפל, שלב אחר שלב.

ראשית נמקם את הקלפים לפי צבע כך שמספר האדומים תמיד גדול או שווה למספר השחורים: זוהי בדיוק הבעיה של מספרי קטלן ולכן יש C_{26} דרכים לעשות זאת. באופן דומה יש C_{13} למקם את התלתנים והעלים במקומות המוקצים לקלפים השחורים ו- C_{13} דרכים למקם את הלבבות והיהלומים.

לאחר שהקצינו מקומות לסוגים השונים נותר רק למקם את הקלפים. יש כמובן $(13!)^4$ דרכים לעשות זאת. **טעויות נפוצות:** לא להכפיל במספר הדרכים למקם את הקלפים.

ב. (7 נק') כמה שליפות קוסס מקיימות בנוסף שארבעת הקלפים הראשונים חולקים את אותו המספר (לדוגמה, כל ארבעת הקלפים הראשונים הם קלפים עם המספר 5)? רשמו תשובה סופית בלבד. תשובה עם סימן סכימה תקבל ניקוד חלקי, אם בכלל.

תשובה סופית: $13 \cdot C_2 \cdot C_{24} \cdot C_{12} \cdot C_{12} \cdot (12!)^4$

הסבר: בעזרת חוק הכפל: יש 13 דרכים לבחור את זהות הקלף הראשון, לפי הסעיף הקודם יש $C_2 \cdot C_1 \cdot C_1 = C_2$ דרכים לסדר את ארבעת הקלפים הראשונים ו- $C_{24} \cdot C_{12} \cdot C_{12} \cdot (12!)^4$ לסדר את 48 הקלפים הנותרים (שלהם רק 12 ערכים אפשריים).

ג. (7 נק') (בסעיף זה אין להתייחס לתנאי בסעיף ב). כמה שליפות קוסס מקיימות בנוסף כי מספרו של הקלף הראשון שנשלף גדול או שווה למספרו של הקלף האחרון? רשמו תשובה סופית בלבד. תשובה עם סימן סכימה תקבל ניקוד חלקי, אם בכלל.

תשובה סופית: $C_{26} \cdot C_{13} \cdot C_{13} \cdot (13!)^2 (12!)^2 \cdot \frac{14 \cdot 13}{2}$

הסבר: מספר הדרכים לסדר את הסוגים השונים הוא, כמו בסעיף א, $C_{26} \cdot C_{13} \cdot C_{13}$. כדי לספור את כמה דרכים חוקיות ישנן לסדר את המספרים נשים לב כי אם ערכו של הקלף הראשון הוא k אז ישנם k ערכים אפשריים לקלף האחרון. את שאר המספרים אפשר לחלק בכל אופן. לכן לפי חוקי החיבור והכפל, מספר הסידורים החוקיים הוא

$$C_{26} \cdot (C_{13})^2 \cdot \left((13!)^2 \cdot (12!)^2 \cdot \sum_{k=1}^{13} k \right) = C_{26} \cdot (C_{13})^2 \cdot \left((13!)^2 \cdot (12!)^2 \cdot \frac{13 \cdot 14}{2} \right)$$

הסבר אלטרנטיבי: נסמן ב- X את מספר שליפות הקוסם כפי שחישבנו בסעיף א. תהי $Y \subseteq X$ קבוצת השליפות בהן ערכו של הקלף הראשון וערכו של הקלף האחרון זהים. מתקיים $|Y| = |X|/13$. נשים לב כי בדיוק חצי מהשליפות בקבוצה $X \setminus Y$ הן חוקיות (ישנו זיווג בין השליפות החוקיות והלא חוקיות -- פשוט נחליף את ערכיהם של הקלף הראשון והאחרון), וגם כל השליפות ב- Y חוקיות. נקבל סך הכל כי מספר השליפות החוקיות הוא $|X \setminus Y|/2 + |Y| = 6|X|/13 + |X|/13 = 7|X|/13$.

שאלה 5 (20 נקודות)

לכל n טבעי וחיובי נסמן ב- a_n את מספר המחרוזות ב- $\{0, 1, 2\}^n$ המתחילות בספרה 0, מסתיימות בספרה 2 ולא מכילות אף אחד מהרצפים 00, 10, 21 ו-22. לדוגמא: המחרוזת 02012 היא חוקית והמחרוזת 0122 איננה חוקית. מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה מספיקים עבור a_n . נמקו את תשובתכם.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (\forall n \geq 3): \text{ (תשובה סופית):}$$

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1: \text{ (תשובה סופית):}$$

הסבר: נגדיר סדרת עזר b_n - מס' המחרוזות ב- $\{0, 1, 2\}^n$ המתחילות בספרה 1, מסתיימות בספרה 2 ולא מכילות אף אחד מהרצפים 00, 10, 21 ו-22.

נסמן ב- A_n ו- B_n את קב' המחרוזות שנספרות ע"י a_n ו- b_n בהתאמה (ז"א $a_n = |A_n|$, $b_n = |B_n|$).
תנאי התחלה:

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1; \quad b_0 = 0, b_1 = 0, b_2 = 1.$$

נניח $n \geq 3$. מכיוון שב- A_n אסור שיופיע הרצף 00, איברי A_n מתחלקים לשתי קבוצות:

1. מחרוזות המתחילות ב-01.

נבחין כי ע"י מחיקת התו 0 שבתחילת המחרוזת נקבל זיווג מקבוצת המחרוזות הנ"ל לקבוצה B_{n-1} , לכן מספרן הוא $|B_{n-1}| = b_{n-1}$.

2. מחרוזות המתחילות ב-02.

נבחין שהתו השלישי במחרוזת אלו חייב להיות 0 (אסור רצף 21 ו-22). ע"י מחיקת התווים 02 שבתחילת המחרוזת נקבל זיווג מקבוצת המחרוזות הנ"ל לקבוצה A_{n-2} , לכן מספרן הוא $|A_{n-2}| = a_{n-2}$.
בסה"כ מעיקרון החיבור:

$$a_n = b_{n-1} + a_{n-2} \quad (\forall n \geq 3).$$

באופן דומה עבור B_n : מכיוון שב- B_n אסור שיופיע הרצף 10, איברי B_n מתחלקים לשתי קבוצות:

1. מחרוזות המתחילות ב-11.

נבחין כי ע"י מחיקת התו 1 שבתחילת המחרוזת נקבל זיווג מקבוצת המחרוזות הנ"ל לקבוצה B_{n-1} , לכן מספרן הוא $|B_{n-1}| = b_{n-1}$.

2. מחרוזות המתחילות ב-12.

נבחין שהתו השלישי במחרוזת אלו חייב להיות 0 (אסור רצף 21 ו-22). ע"י מחיקת התווים 12 שבתחילת המחרוזת נקבל זיווג מקבוצת המחרוזות הנ"ל לקבוצה A_{n-2} , לכן מספרן הוא $|A_{n-2}| = a_{n-2}$.
בסה"כ מעיקרון החיבור:

$$b_n = b_{n-1} + a_{n-2} \quad (\forall n \geq 3).$$

משתי נוסחאות הנסיגה שקיבלנו נסיק כי $a_n = b_n$ לכל $n \geq 3$, ולמעשה מתנאי ההתחלה השוויון הזה מתקיים לכל n טבעי. לכן בסה"כ נקבל

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (\forall n \geq 3).$$

עם תנאי התחלה $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1$.

שאלה 6 (20 נקודות)

א. (10 נק') נתון כי הפונקציה היוצרת של הסדרה $a_n \in \mathbb{N}$ היא

$$f(x) = \left(\frac{1-x^9}{1-x} \right)^{30}$$

מצאו את a_{20} . נמקו את תשובתכם.

תשובה: האיבר a_{20} הוא המקדם של x^{20} בפיתוח של $f(x)$ לטור חזקות סביב $x=0$. לפי הפיתוחים מההרצאה ונוסחת הבינום,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-x^9}{1-x} \right)^{30} &= (1-x^9)^{30} \cdot \frac{1}{(1-x)^{30}} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{30} \binom{30}{k} (-x^9)^k \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} S(30, m) x^m \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{30} (-1)^k \binom{30}{k} x^{9k} \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} S(30, m) x^m \right) \end{aligned}$$

ניתן לראות ש- x^{20} מתקבל במכפלה זו במקרים הבאים עם המקדמים המופיעים מטה:

$$k=0, m=20: \quad (-1)^0 \binom{30}{0} \cdot S(30, 20) = S(30, 20).$$

$$k=1, m=11: \quad (-1)^1 \binom{30}{1} \cdot S(30, 11) = -30 \cdot S(30, 11)$$

$$k=2, m=2: \quad (-1)^2 \binom{30}{2} \cdot S(30, 2) = \binom{30}{2} \cdot S(30, 2)$$

ומכאן בסה"כ:

$$\begin{aligned} a_{20} &= S(30, 20) - 30 \cdot S(30, 11) + \binom{30}{2} \cdot S(30, 2) \\ &= \binom{49}{20} - 30 \binom{40}{11} + \binom{30}{2} \binom{31}{2}. \end{aligned}$$

ב. (10 נק') בכמה מספרים טבעיים בעלי 30 ספרות, הספרה 0 לא מופיעה כלל וסכום הספרות הוא 50? נמקו את תשובתכם.

תשובה: נפתור באמצעות פונקציות יוצרות: אנו מעוניינים במקדם של x^{50} בפונקציה היוצרת

$$(x^1 + x^2 + x^3 + \dots + x^9)^{30}$$

נשים לב כי

$$\begin{aligned}(x^1 + x^2 + x^3 + \dots + x^9)^{30} &= [x \cdot (1 + x + x^2 + \dots + x^8)]^{30} \\ &= x^{30} \cdot (1 + x + x^2 + \dots + x^8)^{30} \\ &= x^{30} \cdot \left(\frac{1 - x^9}{1 - x} \right)^{30}\end{aligned}$$

נבחין שהמקדם של x^{50} הוא בדיוק המקדם של x^{20} בפונקציה $\left(\frac{1-x^9}{1-x} \right)^{30}$, שהוא בדיוק a_{20} שחישבנו בסעיף הקודם.