מספרי קטלן

גיל כהן

הגדרה (מחרוזת סוגריים חוקית)

מחרוזת באורך $2n$ של סוגריים ( ) נקראת מאוזנת אם

1) יש n מופעים של (

2) בכל רישא מספר המופעים של (אינו עולה על מספר המופעים של).

התחלה, ראש, החלק הראשון

הרישות של abcd הן

a, ab, abc, abcd והמחרוזת הריקה (ε).

הגדרה (מחרוזת סוגריים חוקית)

מחרוזת באורך $2n$ של סוגריים ( ) נקראת מאוזנת אם

1) יש n מופעים של (

2) בכל רישא מספר המופעים של) אינו עולה על מספר המופעים של (.

התחלה, ראש, החלק הראשון

דוגמאות

$n=1$ ()

$n=2$ ()()   (())

$n=3$ ()()()   ()(())   (())()   (()())   ((()))

הגדרה (מחרוזת סוגריים חוקית)

מחרוזת באורך $2n$ של סוגריים $()$ נקראת מאוזנת אם

1) יש n מופעים של (

2) בכל רישא מספר המופעים של) אינו עולה על מספר המופעים של (.

התחלה, ראש, החלק הראשון

דוגמאות

$n=1$: ()

$n=2$: ()()   (())

$n=3$: ()()()   ()(())   (())()   (()())   ((()))

נסמן ב-C_n את מספר המחרוזות באורך $2n$ הנ"ל:

$C_1=1$

$C_2=2$

$C_3=5$

C_n נקרא <u>מספר קטלן</u> ה-n-י.

הגדרה (מחרוזת סוגריים חוקית)

מחרוזת באורך 2n של סוגריים ( ) נקראת מאוזנת אם

1) יש n מופעים של (

2) בכל רישא מספר המופעים של) אינו עולה על מספר המופעים של (.

התחלה, ראש, החלק הראשון

דוגמאות

$n=1$ ( )

$n=2$ ( )( ) (( ))

$n=3$ ( )( )( ) ( )(( )) (( ))( ) (( )( )) ((( )))

נסמן ב- C_n את מספר המחרוזות באורך 2n הנ"ל:

$C_1=1$

$C_2=2$

$C_3=5$

C_n נקרא מספר קטלן ה-n-י.

על שם איילר...

הגדרה (מחרוזת סוגריים חוקית)

מחרוזת באורך $2n$ של סוגריים ( ) נקראת מאוזנת אם

1) יש n מופעים של (

2) בכל רישא מספר המופעים של) אינו עולה על מספר המופעים של (.

התחלה. ראש, החלק הראשון

דוגמאות

$n=1$ ()

$n=2$ ()() (())

$n=3$ ()()() ()(()) (())() (()()) ((()))

דאגב השימוש הראשון של מספרי קטלן היה (כך נראה) לצורך הנוסחה:

$$\sin(2x) = 2\sin(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{k-1}}{4^{k-1}} \cdot \sin^{2k+1}(x)$$

נסמן ב- C_n את מספר המחרוזות באורך $2n$ כנ"ל:

$C_1 = 1$

$C_2 = 2$

$C_3 = 5$

C_n נקרא מספר קטלן ה-n-י.

על שם אוילר...

הגדרה (מחרוזת סוגריים חוקית)

מחרוזת באורך $2n$ של סוגריים ( ) נקראת מאוזנת אם

1) יש n מופעים של (

2) בכל רישא מספר המופעים של) אינו עולה על מספר המופעים של (.

התחלה, ראש, החלק הראשון

משפט

ממבט ראשון אפילו לא ברור שזה מספר שלם

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

לפני שנוכיח את המשפט נמצא יחס רקורסיבי שמספרי קטלן מקיימים.

הגדרה (מחרוזת סוגריים חוקית)

מחרוזת באורך $2n$ של סוגריים ( ) נקראת מאוזנת אם

1) יש n מופעים של (

2) בכל רישא מספר המופעים של) אינו עולה על מספר המופעים של (.

התחלה, ראש, החלק הראשון

משפט

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}$$

הגדרה (מחרוזת סוגריים חוקית)

מחרוזת באורך $2n$ של סוגריים ( ) נקראת מאוזנת אם

1) יש n מופעים של (

2) בכל רישא מספר המופעים של (אינו עולה על מספר המופעים של).

התחלה, ראש, החלק הראשון

משפט

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}$$

הוכחה

נפריד למקרים (נעזר בעיקרון החיבור) לפי המיקום במחרוזת של הסוגר שמתאים לפותח הראשון.

נשים לב שמיקום זה הוא זוגי

(( ) (( ))) (...

1 זוגי אינדקס זוגי

משפט

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}$$

הוכחה

נפריד למקרים (נעזר בעיקרון החיבור) לפי המיקום במחרוזת של הסוגר שמתאים לפותח הראשון.

נשים לב שמיקום זה הוא זוגי

$$\underset{1}{(}\underbrace{(\,)\,(\,(\,)\,)}_{\text{זוגי}}\,)\,(\,\cdots$$

אינדקס זוגי

נסמן אינדקס זה ב- $2k$

$$\underset{1}{(}\;\underbrace{\qquad\qquad}_{2(k-1)}\;\underset{2k}{)}\;\underbrace{\qquad\qquad}_{2(n-k)}$$

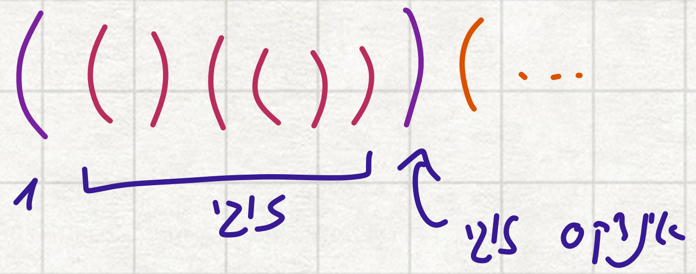
משפט

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}$$

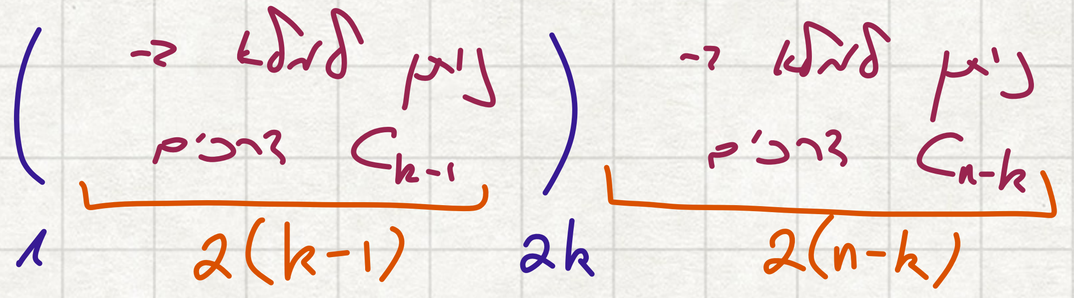
הוכחה

נפריד למקרים (ונעזר בעיקרון החיבור) לפי המיקום במחרוזת של הסוגר שמתאים לפותח הראשון.

נשים לב שמיקום זה הוא זוגי



נסמן אינדקס זה ב- $2k$



מעיקרון הכפל, עבור k נתון יש $C_{k-1} \cdot C_{n-k}$ מחרוזות כנ"ל, והטענה לכן נובעת מעיקרון החיבור.

Caln

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

משפט

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

בכדי להוכיח את המשפט נראה בעיה אחרת שקשורה למספרי קטלן.

נשאל את עצמנו כמה מסלולים על "הסריג" מ- $(0,0)$ ל- (n,n) ישנם כאשר

א) מותרים רק צעדי $\rightarrow$, $\uparrow$

ב) אסור לחצות ממש את הישר $y=x$.

משפט

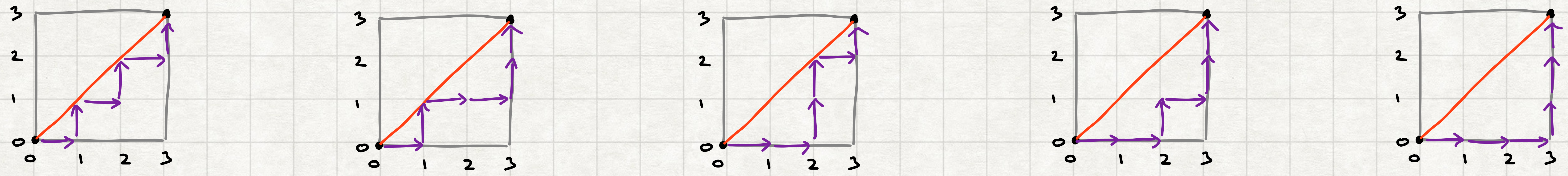
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

בכדי להוכיח את המשפט נמצא בעיה אחרת שקשורה למספרי קטלן.

נשאל את עצמנו כמה מסלולים על ה"סריג" מ- $(0,0)$ ל- (n,n) ישנם כאשר

א) מותרים רק צעדי $\rightarrow$, $\uparrow$

ב) אסור לחצות ממש את הישר $y=x$.



משפט

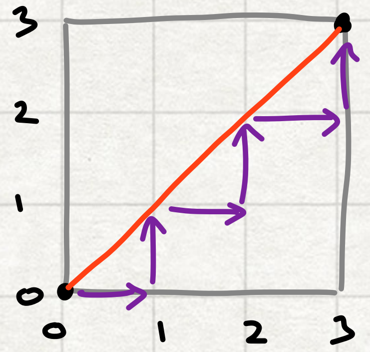
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

בכדי להוכיח את המשפט נמצא בעיה אחרת שקשורה למספרי קטלן

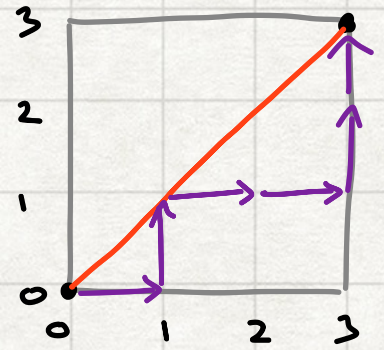
נשאל את עצמנו כמה מסלולים על "הסריג" מ- $(0,0)$ ל- (n,n) ישנם כאשר

א) מותרים רק צעדי $\rightarrow$, $\uparrow$

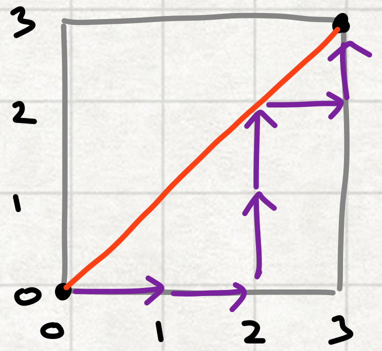
ב) אסור לחצות ממש את הישר $y=x$.



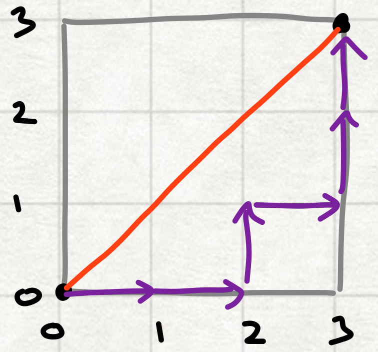
$()()()$



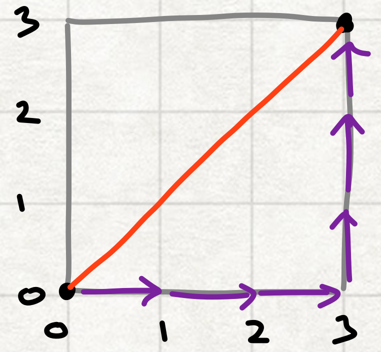
$()(())$



$(())()$



$(()())$



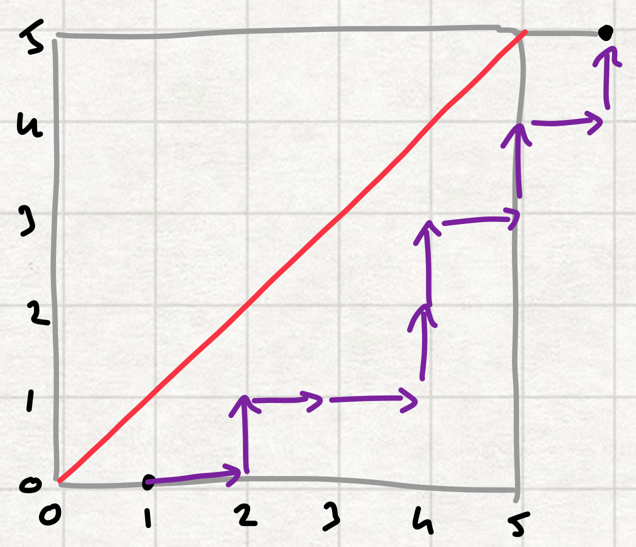
$((()))$

משפט

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

הוכחה

יהיה טיפה יותר נוח "להזיז" את הבעיה ולשאול כמה מסלולים מ- $(1,0)$ ל- $(n+1,n)$ יש על הסריג תוך שימוש בצעדי $\rightarrow$, $\uparrow$ בלבד וכך שהמסלול לא נוגע בישר $y=x$.

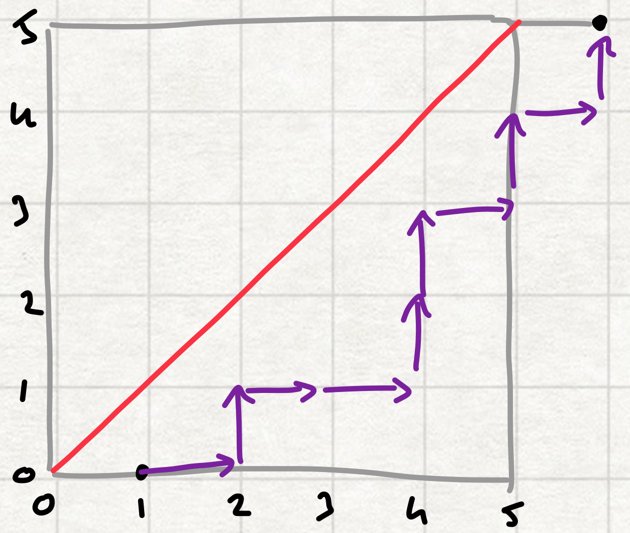


משפט

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

הוכחה

יהיה C יפה יותר נוח "להביע" את הבעיה ולשאול כמה מסלולים מ-$(1,0)$ ל-$(n+1,n)$ יש על הסריג תוך שימוש בצעדי $\rightarrow$, $\uparrow$ בלבד וכך שהמסלול לא נוגע בישר $y=x$.

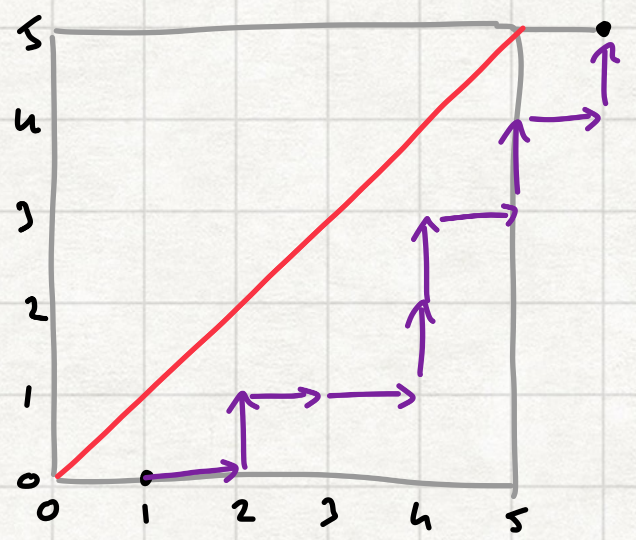


נשתמש בעיקרון המשלים ונספור

א) מספר מסלולי $\uparrow,\rightarrow$ מ-$(1,0)$ ל-$(n+1,n)$ ללא הגבלה נוספת.

ב) מספר מסלולי $\uparrow,\rightarrow$ שכן נוגעים בישר $y=x$.

והתשובה תהיה (א)-(ב)



נשתמש בעיקרון המשלים ונספור

א) מספר מסלולי $\uparrow,\rightarrow$ מ- $(1,0)$ ל- $(n+1,n)$
ללא הגבלה נוספת.

ב) מספר מסלולי $\uparrow,\rightarrow$ שכן נוגעים בישר $y=x$.

פתרון א'

השאלה היא בעצם כמה מחרוזות בינאריות $(\rightarrow,\uparrow)$ יש מאורך $2n$ עם בדיוק n $\rightarrow$.

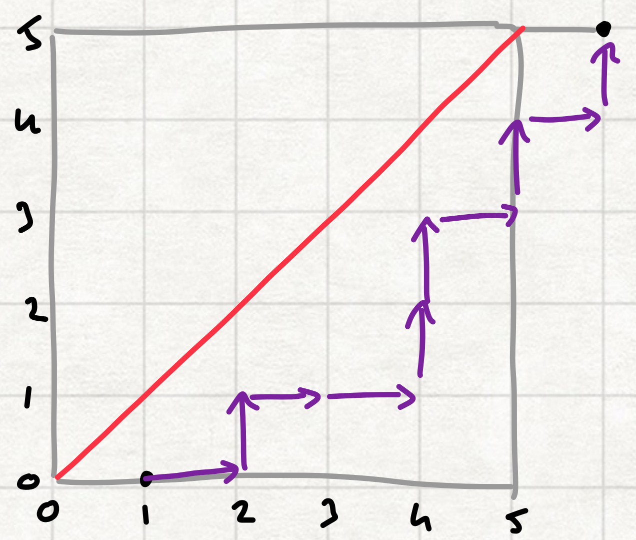
אז שאלה זו פתרנו והתשובה היא $\binom{2n}{n}$.

נשתמש בעיקרון המשלים ונספור

א) מספר מסלולי $\uparrow, \rightarrow$ מ- $(1,0)$ ל- $(n+1,n)$

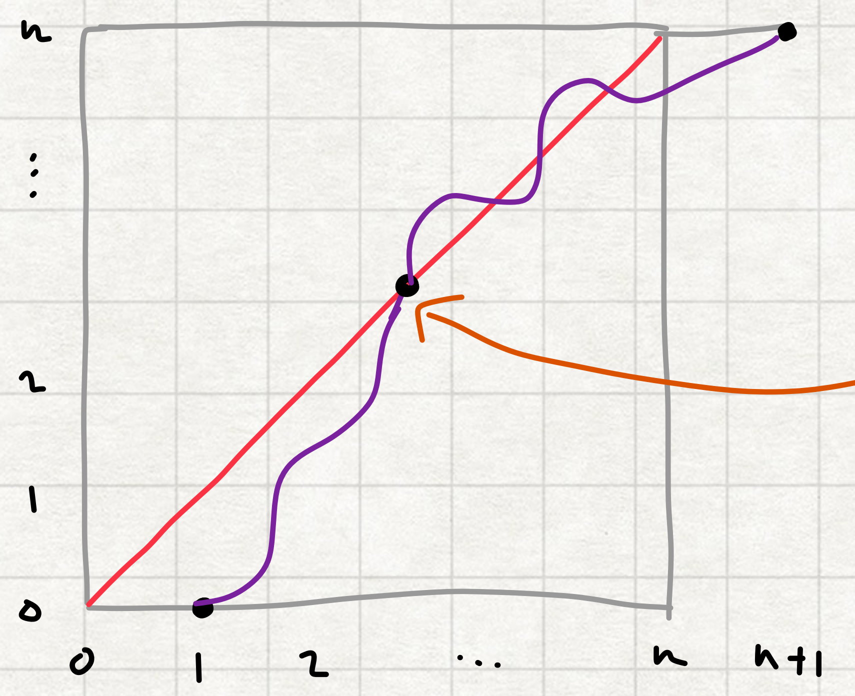
ללא הגבלה נוספת.

ב) מספר מסלולי $\uparrow, \rightarrow$ שבן נוגעים בישר $y=x$.

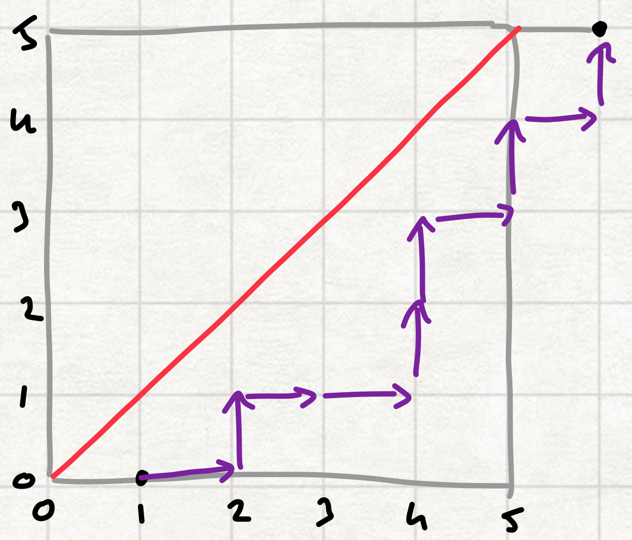


פתרון ב'

הוכחה בציור



הפעם הראשונה שהמסלול נוגע ב- $y=x$



נשתמש בעיקרון המשלים ונספור

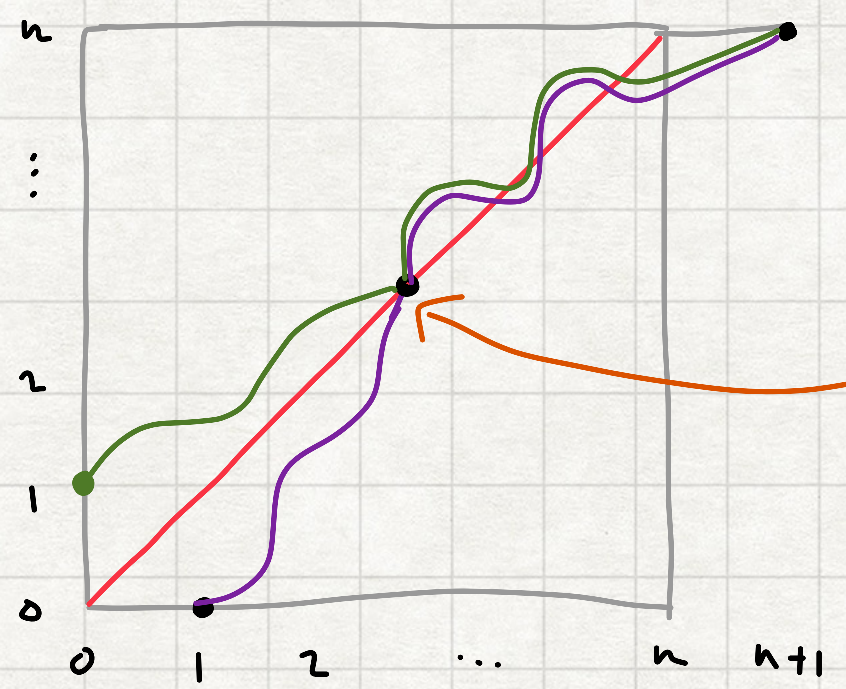
א) מספר מסלול ↑,→ מ- $(1,0)$ ל- $(n+1,n)$

ללא הגבלה נוספת.

ב) מספר מסלול ↑,→ ~~שבו~~ נוגעים - בישר $y=x$.

פתרון ב'

הוכחה בציור



לכל מסלול מ- $(1,0)$ ל- $(n+1,n)$ שנוגע ב- $y=x$ יש מסלול
מ- $(1,0)$ ל- $(n+1,n)$ מתאים אחד ויחיד מ- $(1,0)$ ל- $(n+1,n)$
מסלול זה מתקבל ע"י שיקוף הרישא של המסלול עד לנק' החיתוך בין
המסלול ו- $y=x$ ביחס לישר $y=x$.

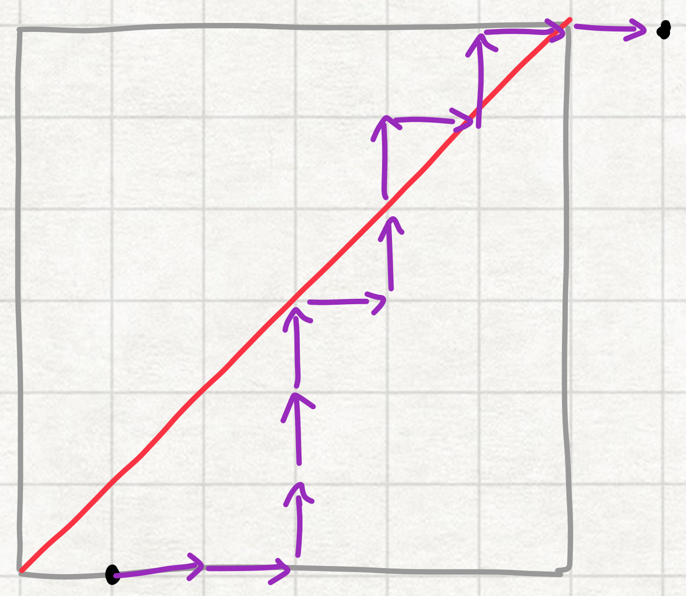
נשתמש בעיקרון המשלים ונספור

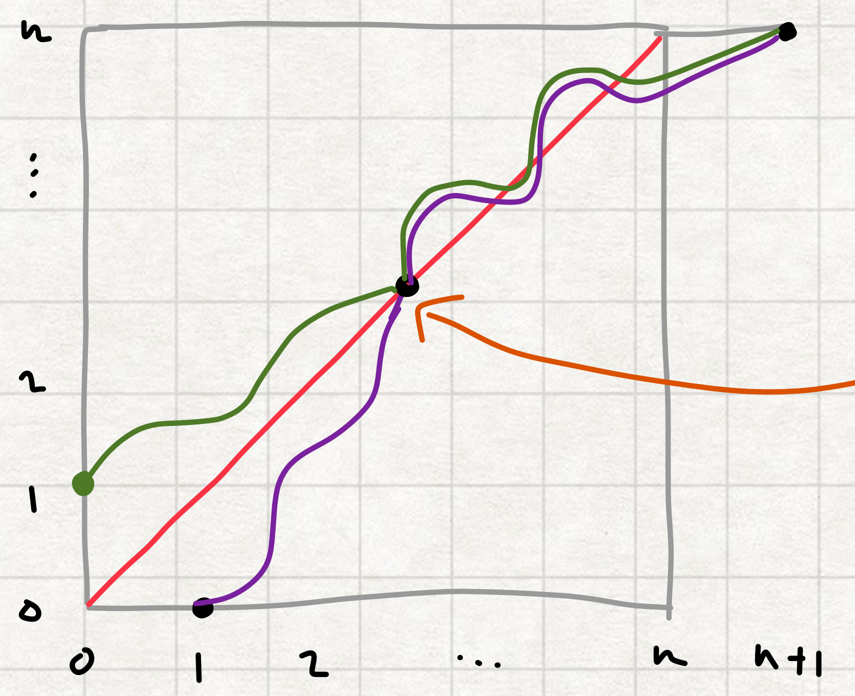
א) מספר מסלולי $\uparrow,\rightarrow$ מ- $(1,0)$ ל- $(n+1,n)$ ללא הגבלה נוספת.

ב) מספר מסלולי $\uparrow,\rightarrow$ ~~שבן~~ נוגעים בישר $y=x$.

פתרון ב'

הוכחה בציור





הפעם הראשונה שהמסלול נוגע ב- $y=x$

לכל מסלול מ- $(1,0)$ ל- $(n+1,n)$ שנוגע ב- $y=x$ יש מסלול מ- $(1,0)$ ל- $(n+1,n)$ מתאים מסלול אחד ויחיד מ- $(1,0)$ ל- $(n+1,n)$

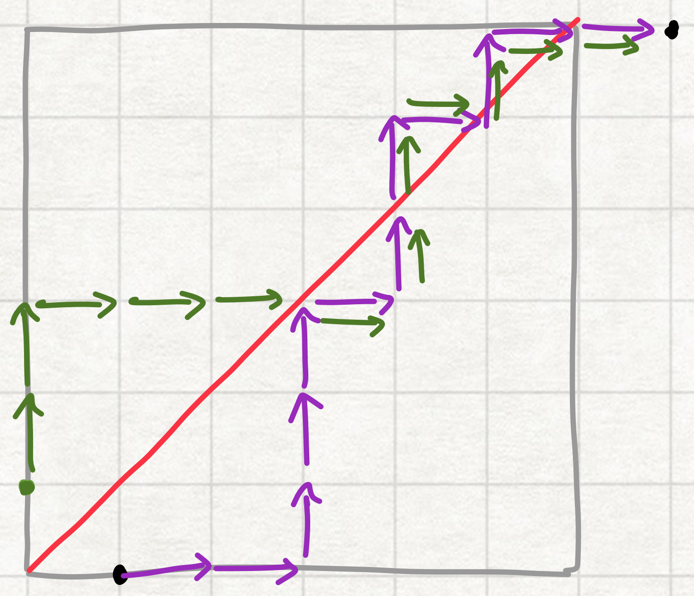
מסלול זה מתקבל ע"י שיקוף הראשון של המסלול עד לנק' החיתוך בין המסלול ו- $y=x$ ביחס לישר $y=x$.

נשתמש בעיקרון המשלים ונספור

א) מספר מסלולי $\uparrow, \rightarrow$ מ- $(1,0)$ ל- $(n+1,n)$

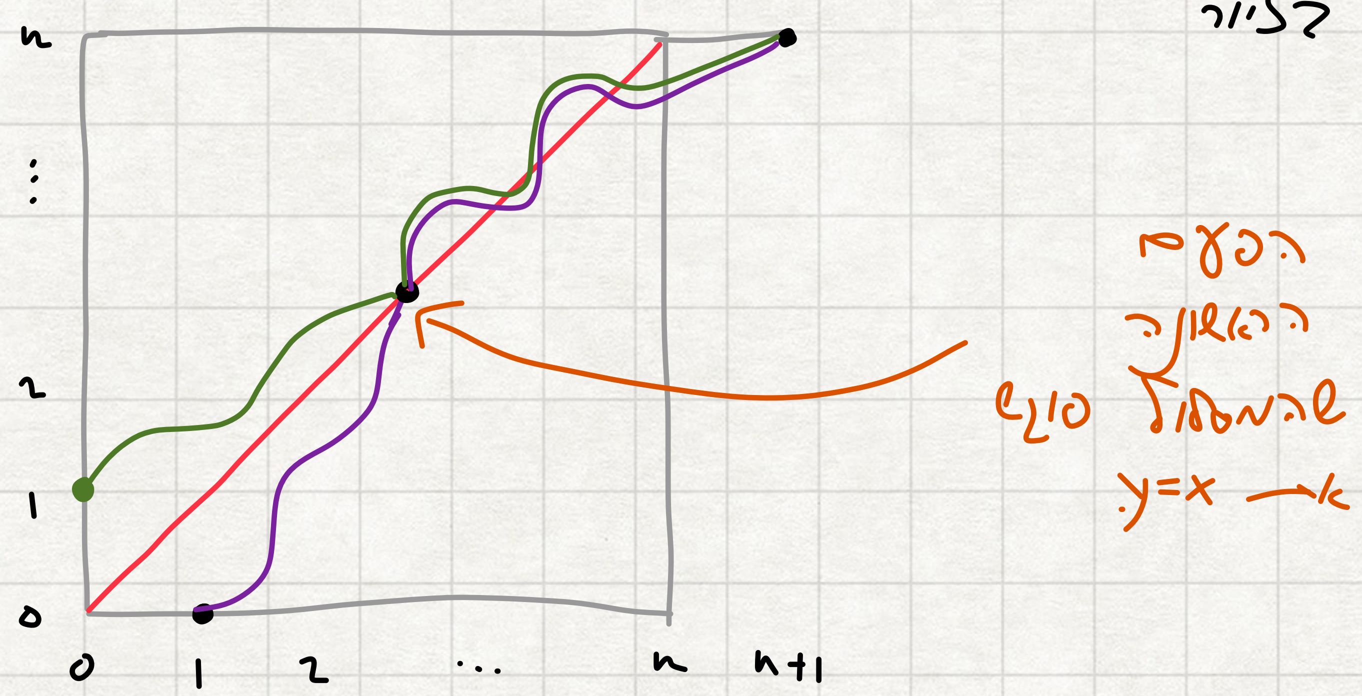
ללא הגבלה נוספת.

ב) מספר מסלולי $\uparrow, \rightarrow$ ~~שבן~~ נוגעים בישר $y=x$.



פתרון ב'

הוכחה בציור



לכל מסלול מ- $(1,0)$ ל- $(n+1,n)$ שנוגע ב- $y=x$ מתאים מסלול

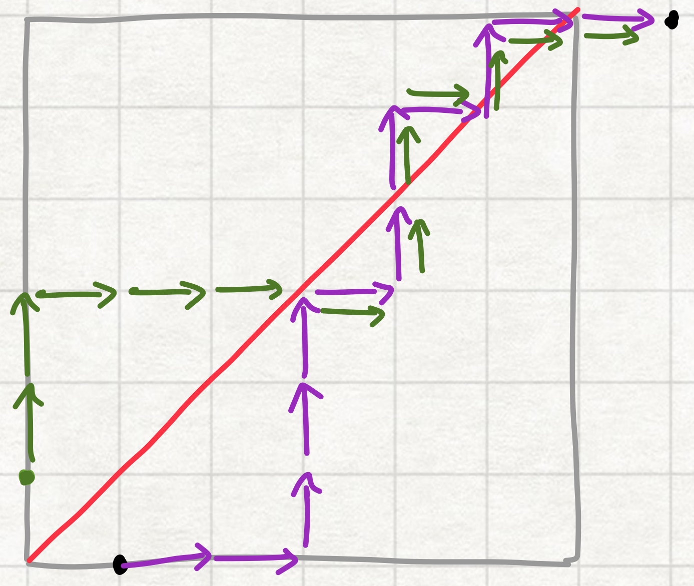
אחד ויחיד מ- $(1,0)$ ל- $(n+1,n)$ כי מתקבל ע"י שיקוף

הרישא של המסלול עד לנק' החיתוך בין המסלול ו- $y=x$ ביחס לישר $y=x$.

טענה:

הפונ' שהגדרנו היא זיווג בין המסלולים מ-$(1,0)$ ל-$(n+1,n)$ שנחתכים עם הישר $y=x$

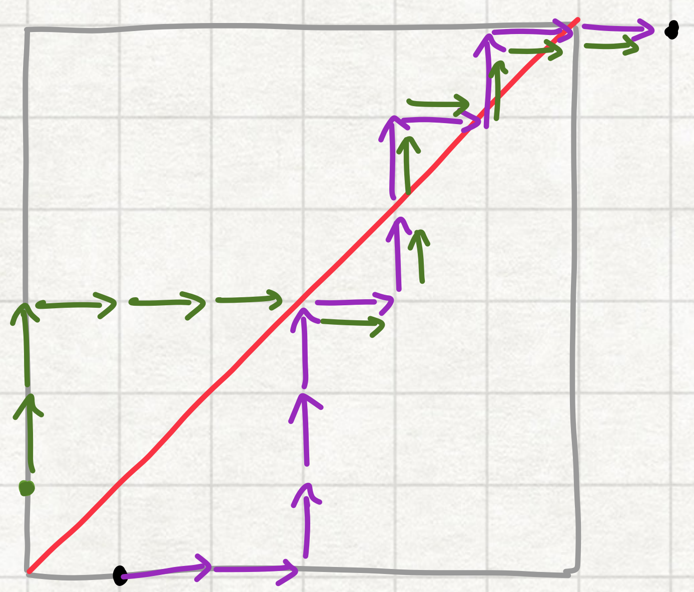
לבין קב' כל המסלולים מ-$(0,1)$ ל-$(n+1,n)$.



טענה:

הפונ׳ שהגדרנו היא זיווג בין המסלולים מ-$(0,1)$ ל-$(n+1,n)$ שנחתכים עם הישר $y=x$

לבין קב׳ כל המסלולים מ-$(0,1)$ ל-$(n+1,n)$.



סקיצת הוכחה

התו״ע נוכיח כי ניתן להפוך את הפונקציה (שיקוף משורטט עם צבעים).

צ״ל: כל מסלול מ-$(0,1)$ ל-$(n+1,n)$ חייב לחתוך את $y=x$ שכן נק׳ אלו נמצאות בצדדים שונים של הישר.

לכן - פתרון ב׳ הוא מספר המחרוזות הבינאריות $(\rightarrow,\uparrow)$ עם $n-1$ $\uparrow$ ו-$n+1$ $\rightarrow$. כלומר, $\binom{2n}{n-1}$.

תזכורת

נשתמש בעיקרון המשלים ונספור

א) מספר מסלולים $\uparrow, \rightarrow$ מ- $(1,0)$ ל- $(n+1,n)$

ללא הגבלה נוספת.

ב) מספר מסלולים $\uparrow, \rightarrow$ שכן נוגעים בישר $y=x$.

לכן

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{n!\,n!}\cdot\frac{n}{n+1}$$

$$= \binom{2n}{n}\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

שאלה 1

רוצים למלא את המספרים $1, 2, \ldots, 2n$ בטבלה $2 \times n$ כך ש:

א) כל אחת מהשורות עולה

ב) כל עמודה עולה

כמה אפשרויות ישנן?

דוגמאות

$n=1$

1
2

$n=2$

1	3
2	4

1	2
3	4

$n=3$

1	2	3
4	5	6

1	2	5
3	4	6

1	2	4
3	5	6

1	3	4
2	4	6

1	3	5
2	4	6

שאלה 1

רוצים למלא את המספרים $1,2,\dots,2n$ בטבלה $2\times n$ כך ש:

א) כל אחת מהשורות עולה

ב) כל עמודה עולה

כמה אפשרויות ישנן?

שאלה 1

רוצים למלא את המספרים $1,2,\ldots,2n$ בטבלה $2\times n$ כך ש:

א) כל אחת משורות עולה

ב) כל עמודה עולה

כמה אפשרויות ישנן?

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&3&4\\2&5&6\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&2&4\\3&5&6\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&2&5\\3&4&6\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$$

סקיצת פתרון

מקום פותחים

מקום סוגרים

שאלה 1

רוצים למלא את המספרים $1,2,\dots,2n$ בטבלה $2\times n$ כך ש:

א) כל אחת מהשורות עולה

ב) כל עמודה עולה

כמה אפשרויות ישנן?

$$\boxed{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix}1&2\\3&4\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}1&3\\2&4\end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix}1&3&5\\2&4&6\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}1&3&4\\2&5&6\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}1&2&4\\3&5&6\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}1&2&5\\3&4&6\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}1&2&3\\4&5&6\end{matrix}}$$

סקיצת פתרון

מיקום פותחים
מיקום סוגרים

$$\boxed{\begin{matrix}&&\\&&\end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix}1&3&5\\2&4&6\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}1&3&4\\2&4&6\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}1&2&4\\3&5&6\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}1&2&5\\3&4&6\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}1&2&3\\4&5&6\end{matrix}}$$

$$\begin{matrix}(&)&(&)&(&)\\1&2&3&4&5&6\end{matrix} \quad \begin{matrix}(&)&(&)&)&)\\1&2&3&4&5&6\end{matrix} \quad \begin{matrix}(&(&)&(&)&)\\1&2&3&4&5&6\end{matrix} \quad \begin{matrix}(&(&)&)&(&)\\1&2&3&4&5&6\end{matrix} \quad \begin{matrix}(&(&(&)&)&)\\1&2&3&4&5&6\end{matrix}$$

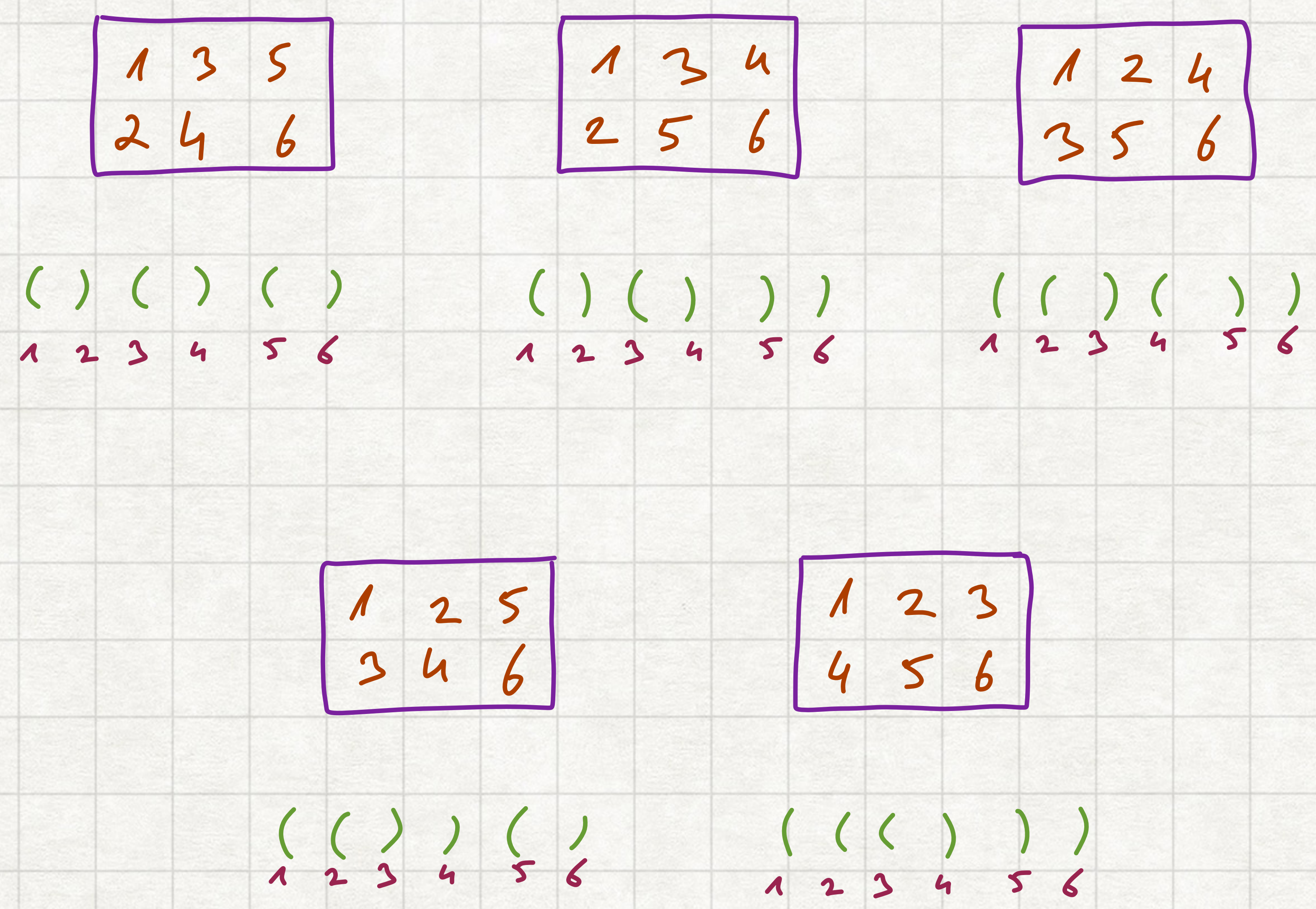
שאלה 1

רוצים למלא את המספרים $1,2,\dots,2n$ בטבלה $2\times n$ כך ש:

א) כל אחת מהשורות עולה

ב) כל עמודה עולה

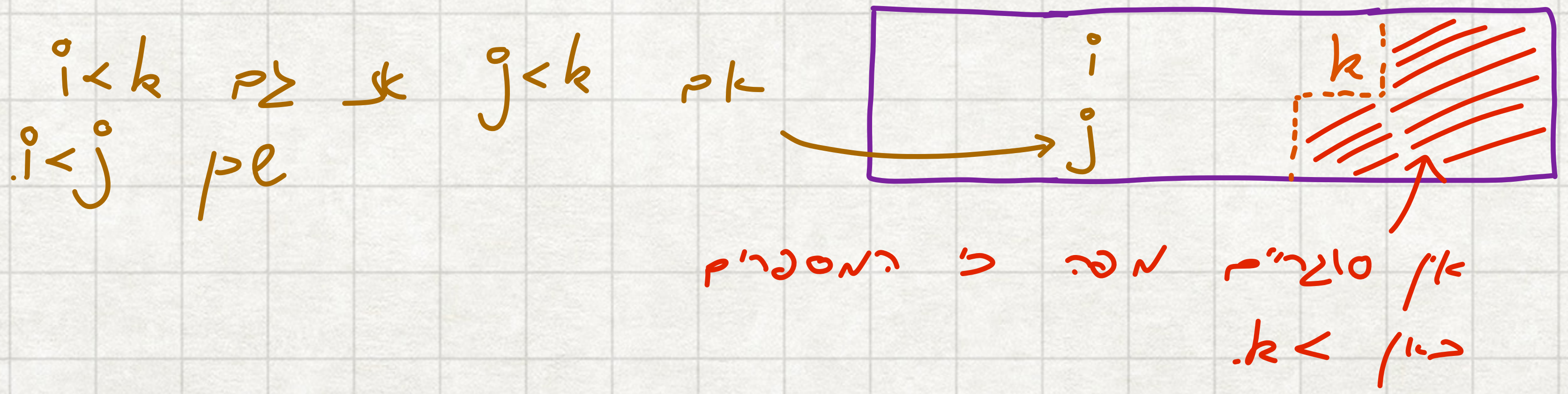
כמה אפשרויות ישנן?



סקיצת פתרון

נשים לב כי המעבר מטבלה לסדרת סוגריים משרה סדרת סוגריים חוקית. אכן, נסתכל על רישא באורך k ונניח שבתא ה-k יש). המקרה השני מטופל בצורה דומה.

אז ברישא עד הכניסה ה-k מופיעים סוגריים מתוך החלק המתואר. ועל כל מספר המתאים ל-) יש מספר המתאים ל-(.



שאלה 1

רוצים למלא את המספרים $1,2,\dots,2n$ בטבלה $2\times n$ כך ש:

א) כל אחת מהשורות עולה

ב) כל עמודה עולה

כמה אפשרויות ישנן?

1	3	5
2	4	6

( ) ( ) ( )
1 2 3 4 5 6

1	3	4
2	5	6

( ) ( )))
1 2 3 4 5 6

1	2	4
3	5	6

(( ) ( ))
1 2 3 4 5 6

1	2	5
3	4	6

(( )) ( )
1 2 3 4 5 6

1	2	3
4	5	6

((( )))
1 2 3 4 5 6

סקיצה פתרון

את הכיוון השני נשאר לכם. התשובה היא לכן C_n.

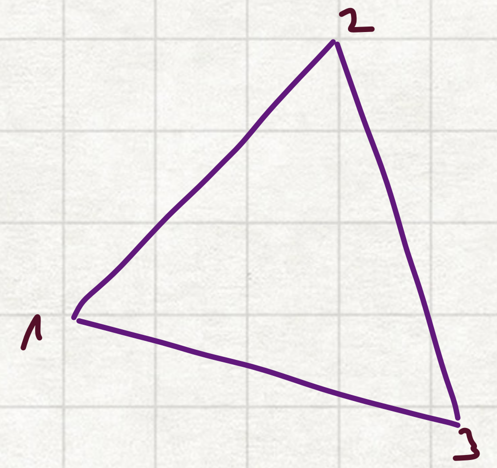
שאלה 2

טריאנגולציה של מצולע קמור היא "חלוקה" של המצולע למשולשים.

מה מספר הטריאנגולציות של מצולע קמור בעל n צלעות?

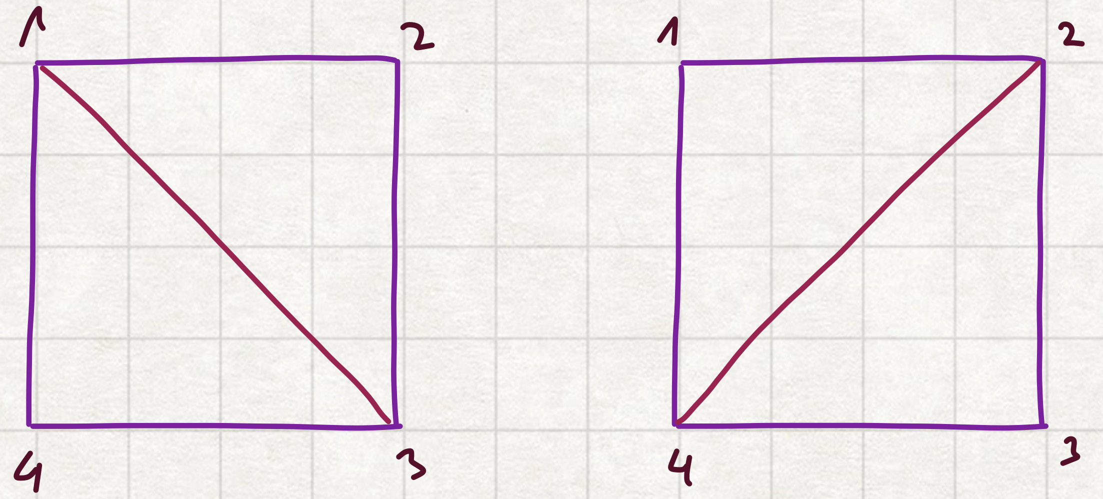
דוגמאות

$n=3$



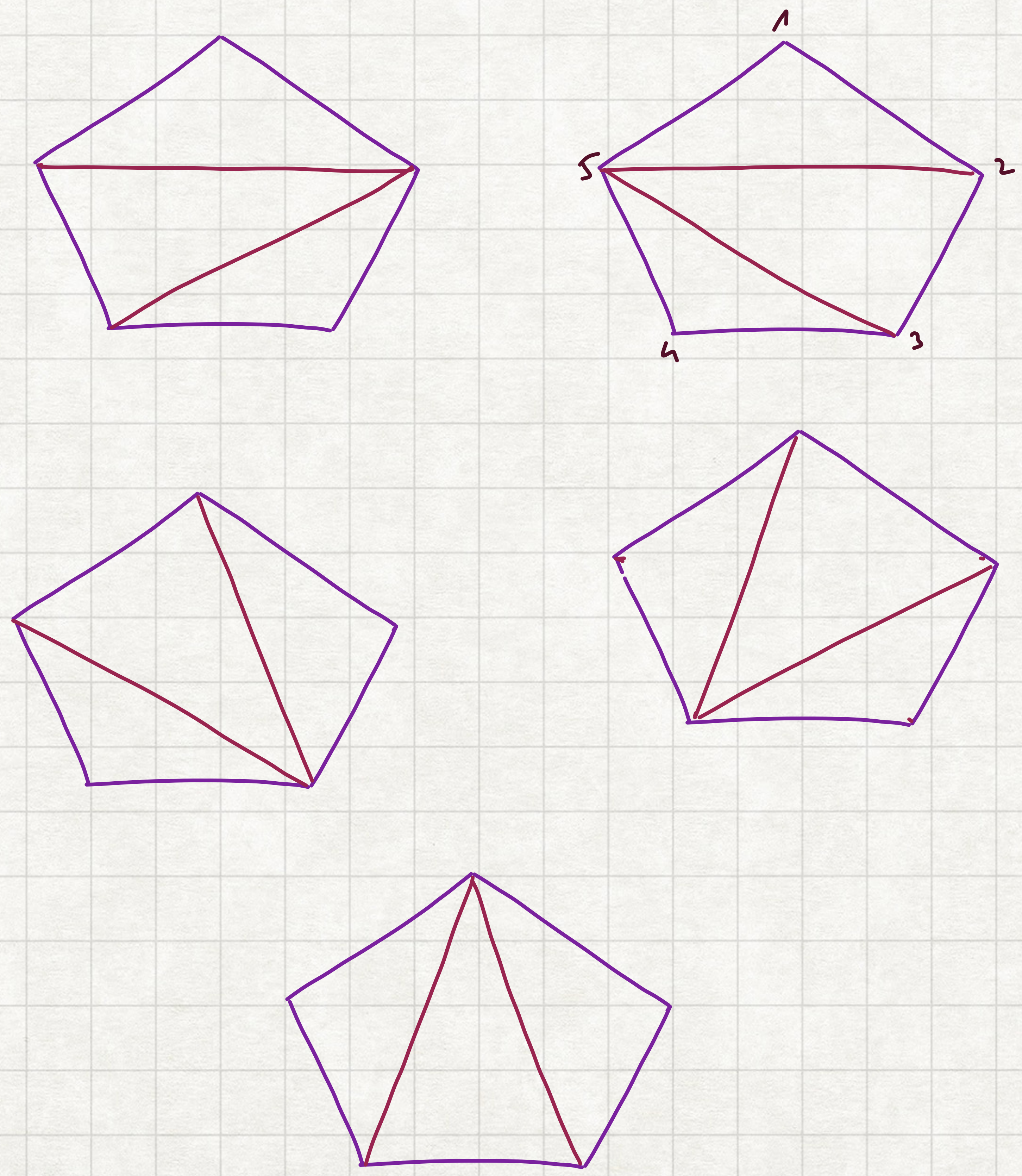
1

$n=4$



2

$n=5$



5

שאלה 2

טריאנגולציה של מצולע קמור היא "חלוקה" של המצולע למשולשים.

מהו מספר הטריאנגולציות של מצולע קמור בעל n צלעות?

פתרון

הרעיון לפתרון שאלה זו הוא למצוא נוסחת נסיגה לבעיה ולהוכיח שהיא זהה לנוסחת הנסיגה של מספרי קטלן, אך "מוזזת" ב-2. על כן התשובה תהיה C_{n-2}.

הערה

זוהי דוגמה לחישובים של נוסחאות נסיגה לבעיות (בניגוד לחישוב עליהן "כתוב הדרך" לקראת נוסחה מפורשת של האיבר ה-n-י כפונ' של n). ואכן, אין נוסחה סגורה שכזו למספרי קטלן והדבר היחידי שאפשר להגיד על C_n כפונ' n הוא ש-:

$$C_n \sim \frac{4^n}{n^{3/2} \cdot \sqrt{\pi}}$$

שאלה 2

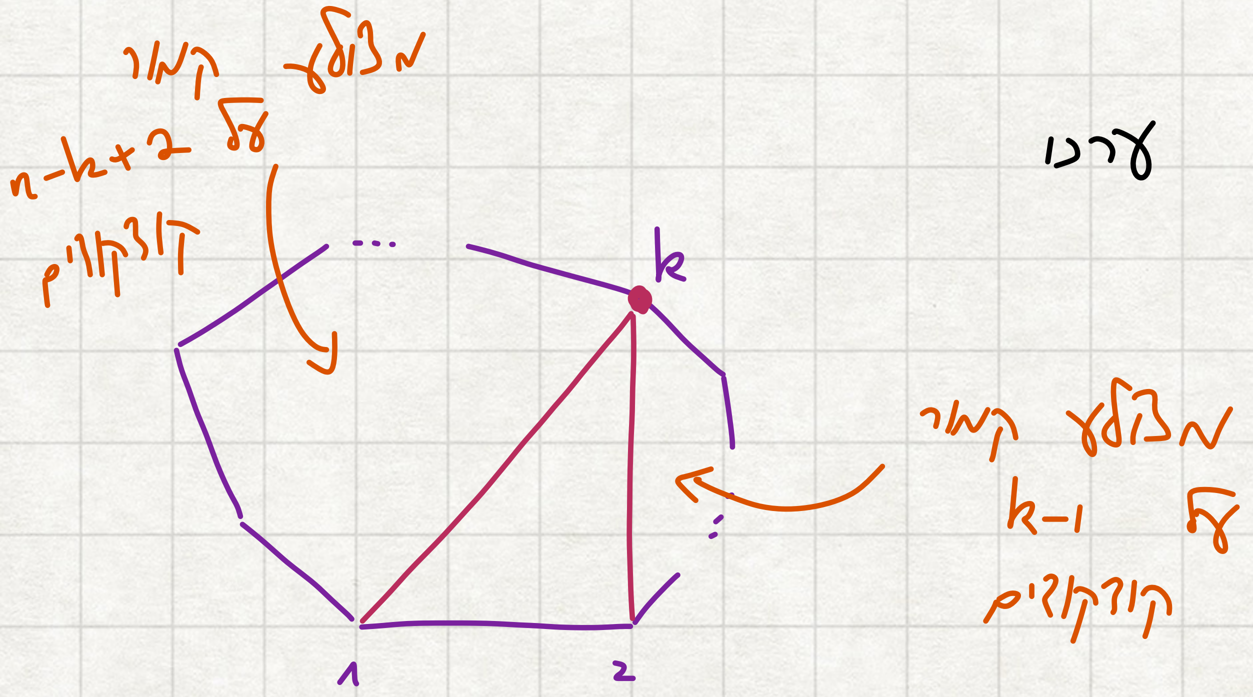
טריאנגולציה של מצולע קמור היא "חלוקה" של המצולע למשולשים.

מהו מספר הטריאנגולציות של מצולע קמור בעל n צלעות?

פתרון

הרעיון לפתרון שאלה זו הוא למצוא נוסחת נסיגה לבעיה ולהוכיח שהיא זהה לנוסחת הנסיגה של מספרי קטלן, אך "מוזזת" ב-2. על כן התשובה תהיה C_{n-2}.

נסמן ב- T_n את מספר הטריאנגולציות של מצולע קמור על n קודקודים. נסתכל על הצלע $(1,2)$.
בכל טריאנגולציה, צלע זו "סוגרת משולש" עם אחד הקודקודים $3,\dots,n$. נפריד למקרים לפי ערכו k של קודקוד זה. ע"פ האיור

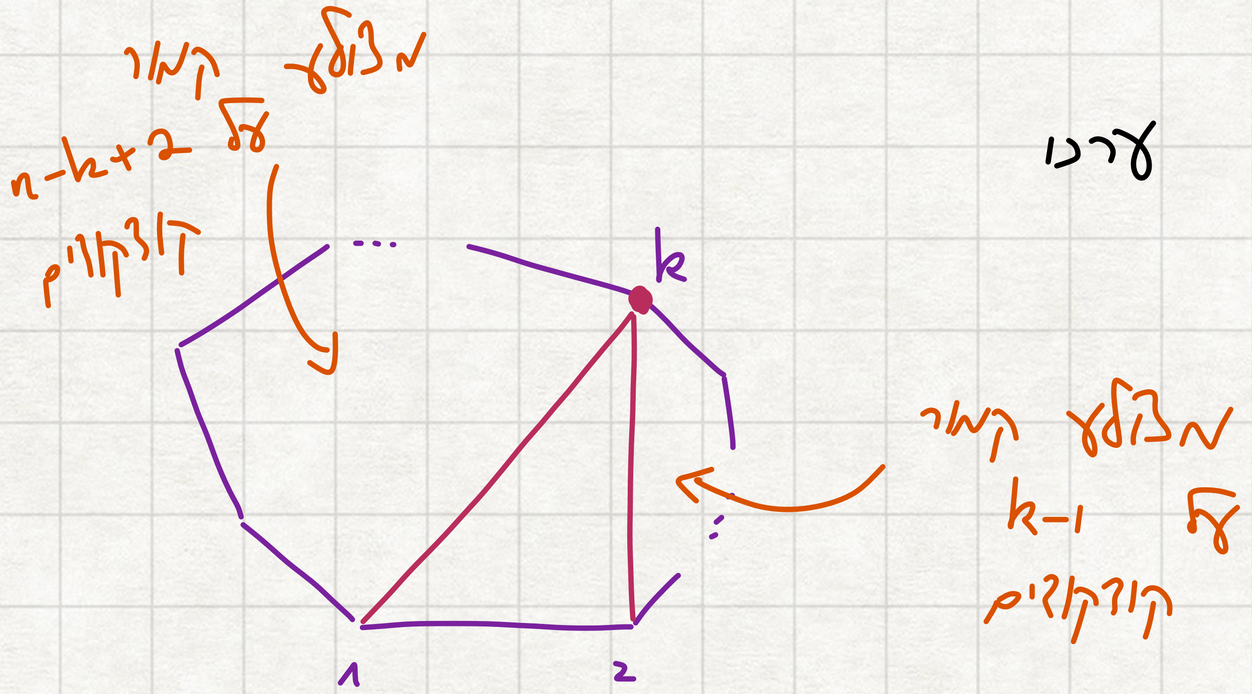


$$T_n = \sum_{k=3}^{n} T_{k-1} T_{n-k+2}$$

פתרון

הרעיון לפתרון שאלה זו הוא למצוא נוסחת נסיגה לבעיה ולהוכיח שהיא זהה לנוסחת הנסיגה של מספרי קטלן, אך "מוזזת" ב-2. על כן התשובה תהיה C_{n-2}.

נסמן ב- T_n את מספר הטריאנגולציות של מצולע קמור על n קודקודים. נסתכל על הצלע $(1,2)$. בכל טריאנגולציה, צלע זו "סוגרת" משולש עם אחד הקודקודים $n,\dots,3$. נפריד למקרים לפי ערכו k של קודקוד זה. ע"פ האיור



$$T_n = \sum_{k=3}^{n} T_{k-1} T_{n-k+2}$$

נבדוק לרגע

$$T_4 = \sum_{k=3}^{4} T_{k-1} T_{6-k} = T_2 T_3 + T_3 T_2$$

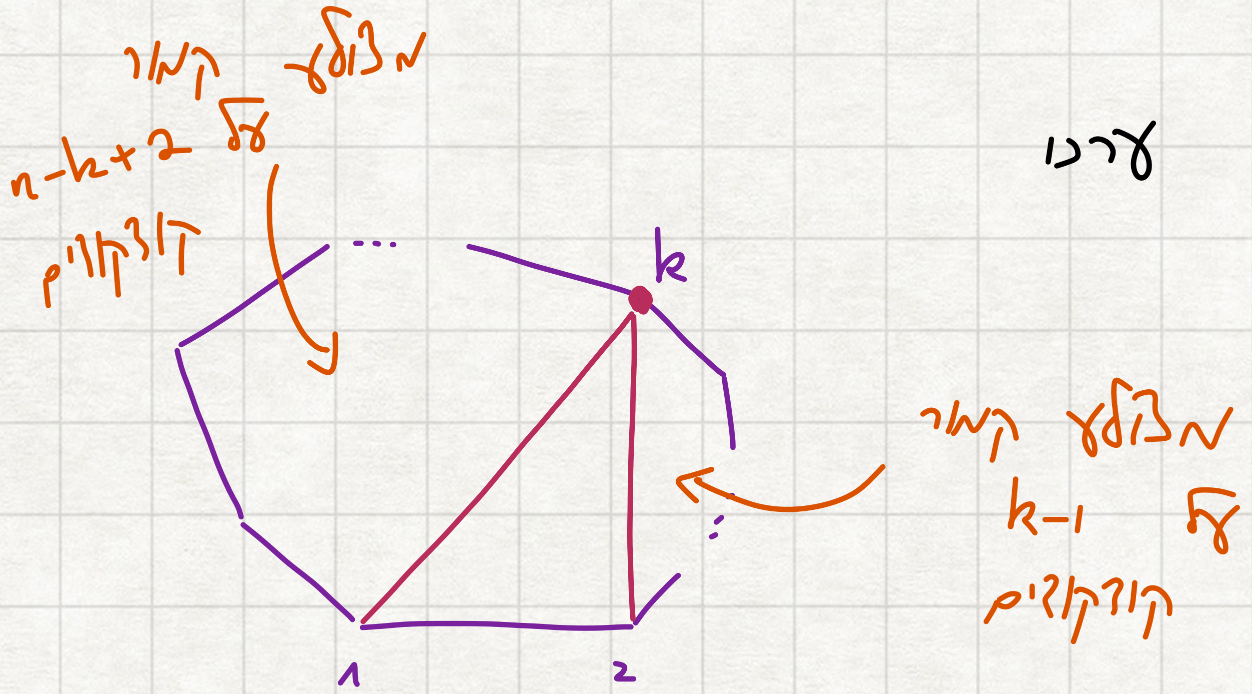
ממ... אנו יודעים ש- $T_3=1$ אבל לא ממש הגיוני מחשבה לגבי T_2. יש טיעונים לטובת $T_2=0$ וטיעונים עבור $T_2=1$.

ובכל מקרה, אנו יודעים ש- $T_4=2$ אז $2 = 2T_2$ ולכן כדאי להקפיד לשמור מתמטיקה ולהגדיר $T_2=1$.

פתרון

הרעיון לפתרון שאלה זו הוא למצוא נוסחת נסיגה לבעיה ולהוכיח שהיא זהה לנוסחת הנסיגה של מספרי קטלן, אך "מוזזת" ב-2. על כן התשובה תהיה C_{n-2}.

נסמן ב- T_n את מספר הטריאנגולציות של מצולע קמור עם n קודקודים. נסתכל על הצלע $(1,2)$.
בכל טריאנגולציה, צלע זו "סוגרת" משולש עם אחד הקודקודים $3,\ldots,n$. נפריד למקרים לפי ערכו k של קודקוד זה ע"פ האיור



$$T_n = \sum_{k=3}^{n} T_{k-1}\, T_{n-k+2}$$

נבדוק לרגע

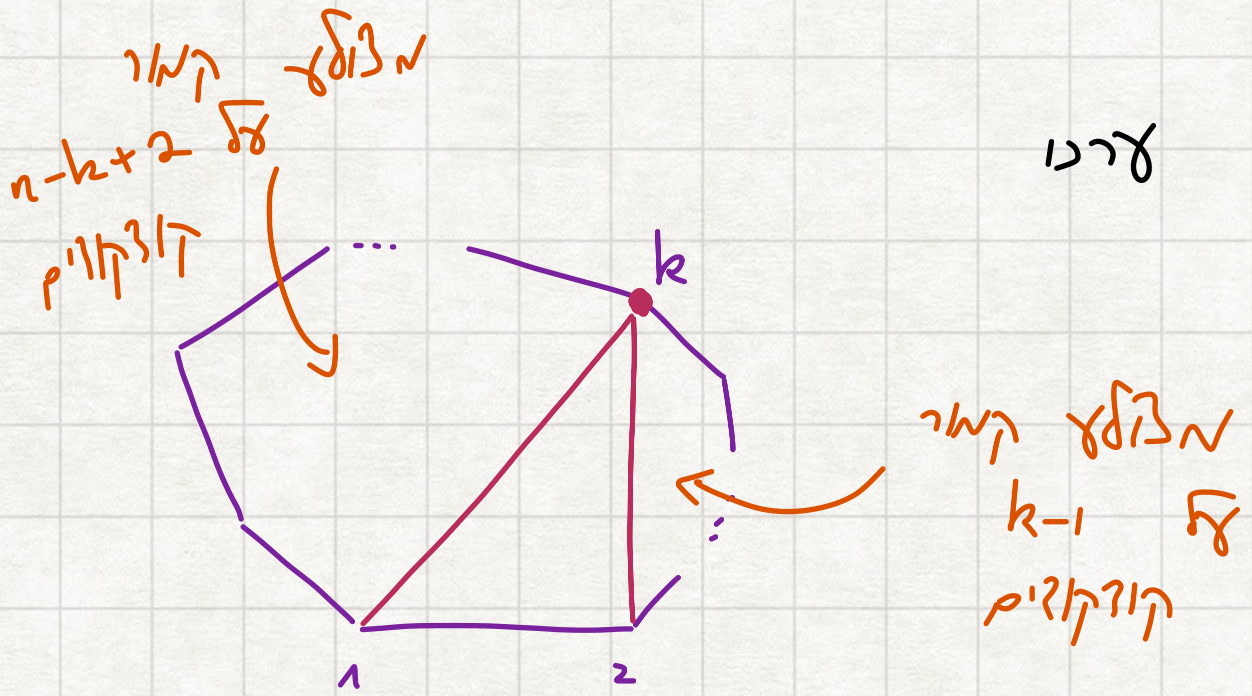
$$T_4 = \sum_{k=3}^{4} T_{k-1}\, T_{6-k} = T_2 T_3 + T_3 T_2$$

$$T_5 = T_2 T_4 + T_3 T_3 + T_4 T_2 = 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 = 5$$

פתרון

הרעיון לפתרון שאלה זו הוא למצוא נוסחת נסיגה לבעיה ולהוכיח שהיא זהה לנוסחת הנסיגה של מספרי קטלן, אך "מוזזת" ב-2. על כן התשובה תהיה C_{n-2}.

נסמן ב- T_n את מספר הטריאנגולציות של מצולע קמור על n צלעים. נסתכל על הצלע $(1,2)$. בכל טריאנגולציה, צלע זו "סוגרת" משולש עם אחד הקודקודים $3,\dots,n$. נפריד למקרים לפי ערכו k של קודקוד זה. ע"פ האיור



$$T_n = \sum_{k=3}^{n} T_{k-1}\, T_{n-k+2}$$

נבדוק לרגע

$$T_4 = \sum_{k=3}^{4} T_{k-1}\, T_{6-k} = T_2T_3 + T_3T_2$$

$$T_5 = T_2T_4 + T_3T_3 + T_4T_2 = 1\cdot2 + 1\cdot1 + 2\cdot1 = 5$$

עוד יתרון נחמד לנוסחאות נסיגה - די קל לחשב בעזרתן כל ערך נתון בעזרת אלגוריתם רקורסיבי / איטרטיבי.

$$T_6 = T_2T_5 + T_3T_4 + T_4T_3 + T_5T_2 = 5+2+2+5 = 14$$

פתרון

ראינו כי $T_n = \sum_{k=3}^{n} T_{k-1} T_{n-k+2}$

ונזכור כי $C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}$

נוכיח באינ' על n כי $T_{n+2} = C_n$.

בסיס: $T_2 = 1 = C_0$ (וגם $T_3 = 1 = C_1$).

צעד. נניח עבור $k<n$ ונוכיח עבור n.

$$T_{n+2} = \sum_{k=3}^{n+2} T_{k-1} T_{n+2-k+2}$$

$$= \sum_{k=3}^{n+2} T_{k-1} T_{n-k+4}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} T_{k+1} T_{n-k+2}$$

פתרון

ראינו כי $T_n = \sum_{k=3}^{n} T_{k-1} T_{n-k+2}$

ונזכור כי $C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}$

$$T_{n+2} = \sum_{k=3}^{n+2} T_{k-1} T_{n+2-k+2}$$

$$= \sum_{k=3}^{n+2} T_{k-1} T_{n-k+4}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} T_{k+1} T_{n-k+2}$$

הנחת האינדוקציה $\longrightarrow$ $$= \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}$$

$$= C_n$$

עוד על קטלן

מספרי קטלן מופיעים באינספור מקרים. למשל, אם ניקח מטריצה $\overbrace{\text{מקרית}}^{\text{גדולה}}$ סימטרית עם כניסות ± 1

הנבחרות באופן בלתי תלוי (פרט לדרישה שהמטריצה סימטרית) אז תוצאה קלאסית וחשובה גורסת כי

המומנט ה-n-י של הערכים העצמיים של המטריצה הוא C_n!

עוד קוריוז (הקשור למטריצות לעיל) הוא:

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} t^{2n}\sqrt{4-t^2}\,dt$$

ולסיום

$$\det\begin{pmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ C_1 & C_2 & & \cdots & C_{n+1} \\ \vdots & & & & \\ C_n & \cdots & & & C_{2n} \end{pmatrix} = 1$$