

NOCC. 1591

2.8 C.G.

הקצה (מחרוזת סוגריים חוקית)

מחרוזת קאווק אג של סוגריים () נקראת מאוזנת אם

(1) יש n מופעים של (

(2) בכל קיפא מספר המופעים של () אינו עולה על מספר המופעים של) .

המילה האם, החלק הראשון

היא של abcd הן

a, ab, abc, abcd והמחצית היותר (3).

הקצרה (מחרוזת סוגריים חוקית)

מחרוזת \rightarrow באורך 2n של סוגריים () נקראת מאוזנת אם

(1) יש n מופעים של (

(2) בכל קיפא נספר המופעים של () אינו עולה על מספר המופעים של) .

התחלה היא, החלק הראשון

איננה אלא \rightarrow

() $n=1$

(()) () () $n=2$

((()) (() () () () ((()) $n=3$

הצורה (מחרוזת סוגריים חוקית)

מחרוזת קאורק אג של סוגריים () נקראת מאוזנת אם

(1) יש n מופעים של (

(2) בכל היציאה מספר המופעים של) אינו עולה על מספר המופעים של (.

המחאה היא, החלק הראשון

דוגמה אלו

() $n=1$

(()) () () $n=2$

(((()))) ((())) ((()) ()) ((())) $n=3$

נסמן C_n - מספר המחרוזות קאורק אג כגוף:

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = 2$$

$$C_3 = 5$$

C_n נקרא מספר קטלן n -י.

הצורה (מחרוזת סוגריים חוקית)

מחרוזת \rightarrow באורך $2n$ של סוגריים () נקראת מאוזנת אם

(1) יש n מופעים של (

(2) בכל היציאה מספר המופעים של () אינו עולה על מספר המופעים של) .

הנחמה היא, החלק הראשון \rightarrow

איננה אלא \rightarrow

$n=1$ ()

$n=2$ (()) () ()

$n=3$ ((())) (() ()) (() ()) () () ()

נסמן c_n - מספר המחרוזות האורך $2n$ הנכונות:
 $c_1 = 1$
 $c_2 = 2$
 $c_3 = 5$

c_n נקרא מספר קטלן n -י. \rightarrow של אינפירי...

הצורה (מחזורי סוגריים חוקיות)

מחזורי קאורק אנ של סוגריים () נקרא - מאוסג - אק

(1) יש n מופעים של (

(2) בכל היציאה מספר המופעים של () אינו עולה על מספר המופעים של)

התחלה היא - החלק הראשון

איננה אק

() n=1

(()) () () n=2

((()) ((()) (((()) (((()) n=3

קצרים הישנו הישנו של מספר קטן
היה (כך נראה) לציור הנוסחה:

$$\sin(2x) = 2\sin(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{k-1}}{4^{k-1}} \cdot \sin^{2k+1}(x)$$

נסמן C_n - מספר המחזורי קאורק אנ הכולל:

$C_1 = 1$
 $C_2 = 2$
 $C_3 = 5$

C_n נקרא מספר קטן ה-n!

של איננה...

הצורה (מחרוזת סוגריים חוקית)

מחרוזת קאוורק וג של סוגריים (נקרא מאונגרא אק

(1) יש n מופעים של

(2) בכל זיגא מספר המופעים של (אין צורה עם מספר המופעים של)

המחלה הוא, החלק הראשון

מסל

$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$
מחלק האופן אפילו לא
דיו של מספר של

לספן שנוכה אה המסל נמנה יחס הקורסודי שמספוי קאן מקיימים.

הקשר (מחזור → סוגריים חוקיות)

מחזור → באורך $2n$ של סוגריים () נקרא → מאוסף → אק

(1) יש n מאוספים של (

(2) ככל הנראה מספר המופעים של () אינו עולה על מספר המופעים של .

הנחה - האם, החלק הראשון

נלכ

$$C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k}$$

הערה (מחוצה סוגריים חוקית)

מחוצה קאורק אג של סוגריים (נקרא מאונג אק

1) יש n מופעים של (

2) ככל היילא מספר המופעים של (אין אילד על מספר המופעים של)

המתנה האם, החלק הראשון

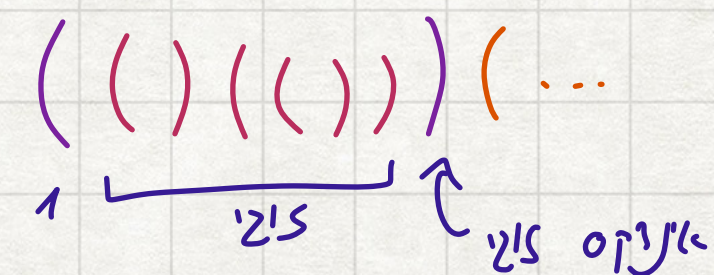
מלכ

$$C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k}$$

חכמה

נפרד למקרים (ולצד בקיקון הידור) לפי המיקום דמיוני של בסוגר שמאיים לפותח הראשון

נשים לפי המיקום של הוא סוגר



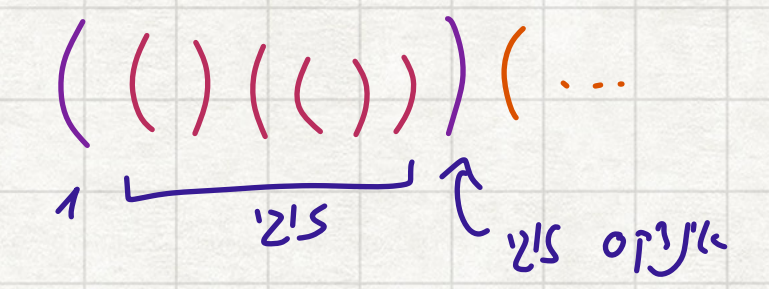
תשובה

$$C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k}$$

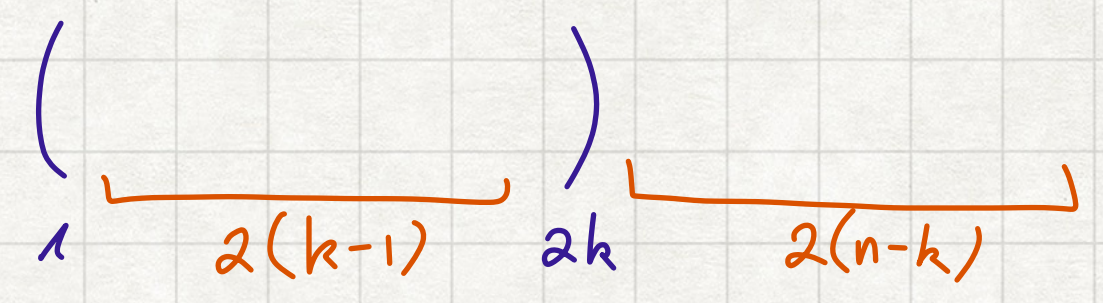
הוכחה

נפרט את המקרים (ולצד קציקרון החיבור) לפי המיקום הממוצע של הסוגר שמכניס לפותח הראשון.

נניח שיש לנו מקרה כזה הוא סוגר



נסמן את המיקום $2k \rightarrow$ סוגר



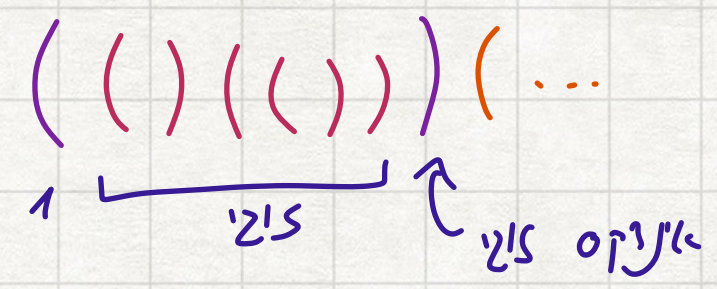
תשובה

$$C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k}$$

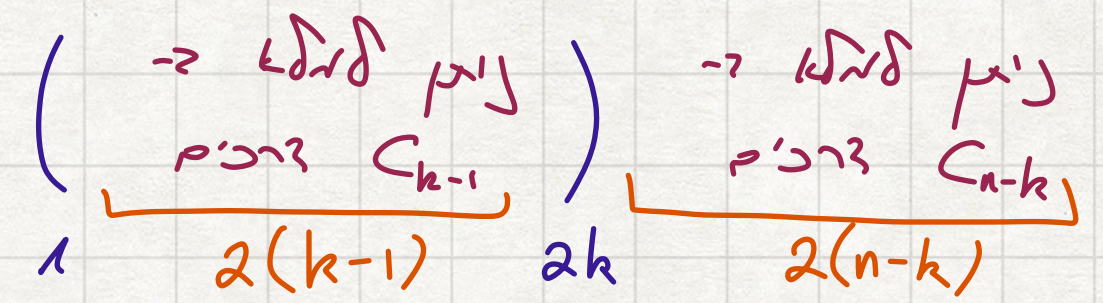
הוכחה

נפרט את המקרים (ולעצור בעצירתן התיכונה) לפי המיקום הממוצע של הסוגר שממלא את המעטפת.

נשים לב שהמיקום של ה-1 הוא סוגר



נסמן את המיקום של $2k \rightarrow 2$



לעצירתן הכוללת, עבור k נתון יש $C_{k-1} \cdot C_{n-k}$ מחזורי סוגר, והמיקום של המיקום התיכונה.

Coln

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

כולן

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

קבוצת סהרובית א → הנה צורה נכונה → אחר → לקורה דנסמרי קצתן
נלקט → צבונן כנה מסודרים צד "הסוף" → (0,0) → (n,n) ישו כושר
↑ → צד'ים רק נותרים (k
→ איו דתב → נש → א → היו .y=x

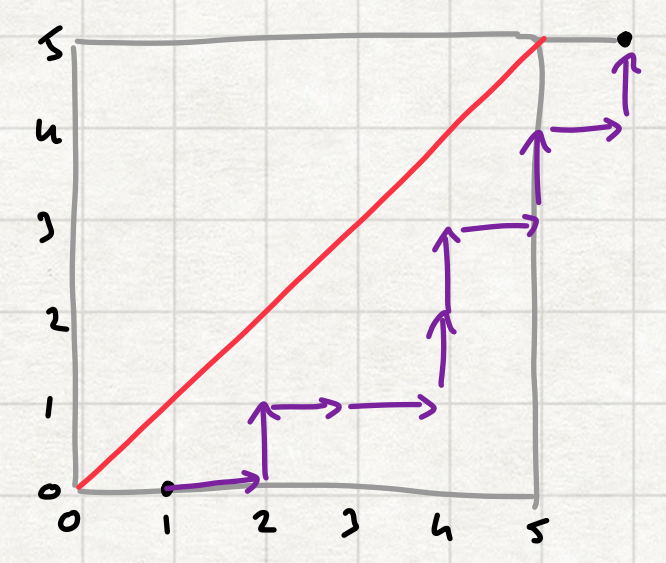
כולן

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

הוכחה

יהיה סיבה יותר נוח "לפז" ארבעה קצוות ולראות כמה מסלולים מ- $(1,0)$ ל- $(n+1,n)$ יש. יש הסתמך רק שיהיה

קצוות \rightarrow, \uparrow וגם שהמסלול לא יגיע ל- $y=x$.



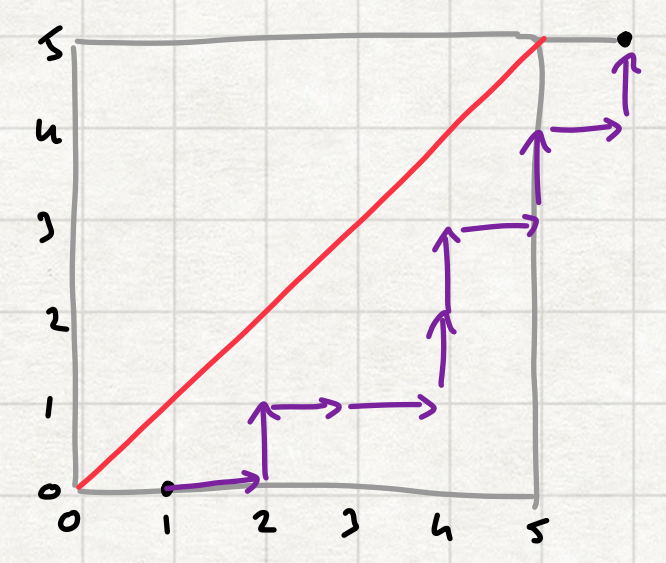
כולל

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

הוכחה

יהיה סיבה יותר נוח "לפז" את הקציה ולראות כמה מסלולים מ- $(1,0)$ ל- $(n+1,n)$ יש עם הסתם רק שיהיה

קציה \rightarrow, \uparrow וגם שהמסלול לא ילך למטה קישר $y=x$.



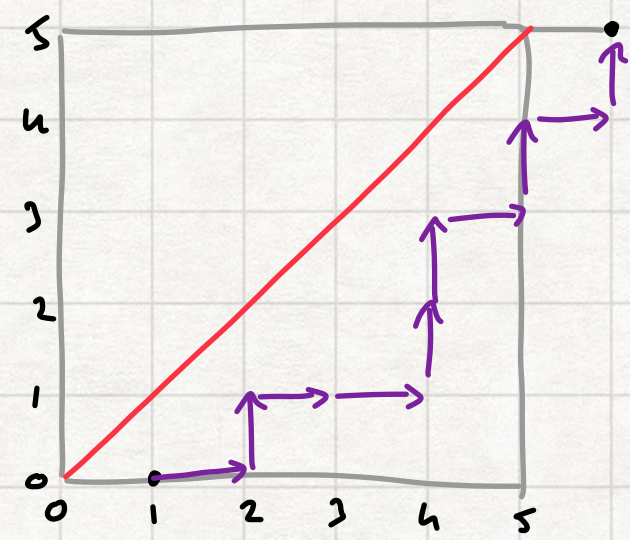
לשמש בקרקון השלם ונסו

כ מספר מסלול \rightarrow, \uparrow מ- $(1,0)$ ל- $(n+1,n)$

ללא הקבלה נוספת.

כ מספר מסלול \rightarrow, \uparrow שכן ילך קישר $y=x$.

וההשקה יהיה $(k)-(?)$



לשמש בעיקרון השני ונספור

כא מספר מסלול \uparrow, \rightarrow מ $(1,0)$ ל $(n+1,n)$

על כל הדרך נוספר.

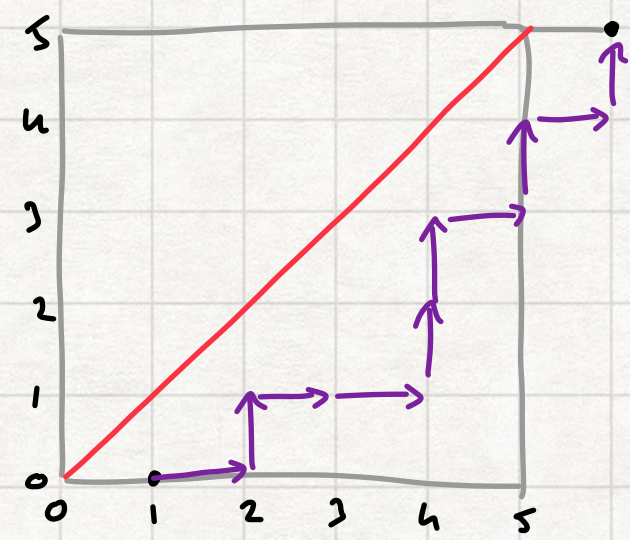
כא מספר מסלול \uparrow, \rightarrow מ $(0,0)$ ל (n,n) על

בתחילתו

השאלה היא בעצם כמה מסלולים קיימים מ $(0,0)$ ל (n,n) בעזרת \rightarrow, \uparrow ויש מאות ואלפי מסלולים כאלה.

אם לא ידועתם מה זה מסלול

$$\binom{2n}{n}$$



למה בעיקרון השני איננו

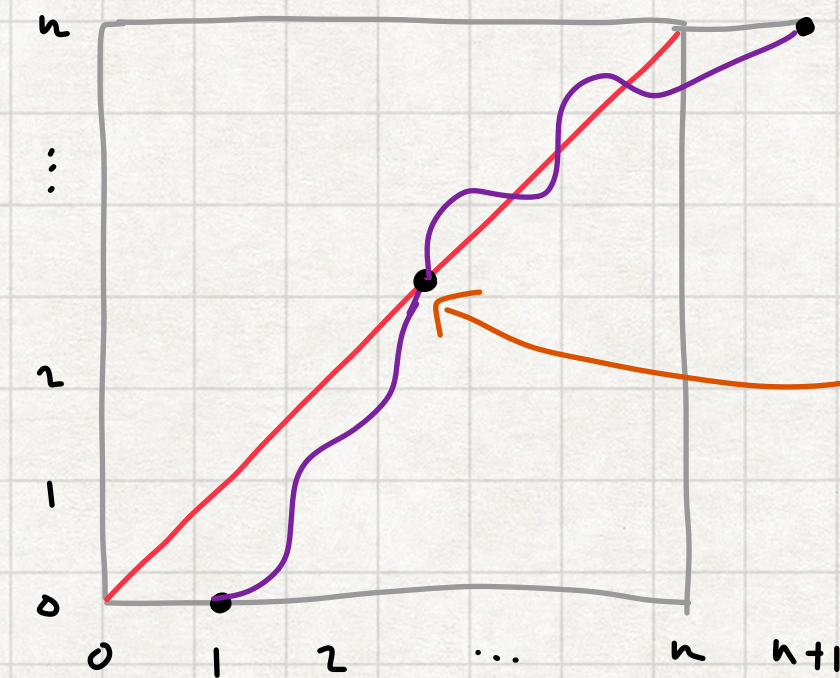
מספר מסוף \uparrow \rightarrow $(1,0)$ \rightarrow $(n+1,n)$

על אף היותו מסוף.

מספר מסוף \uparrow \rightarrow e \rightarrow $y=x$ \rightarrow e

פתרון?

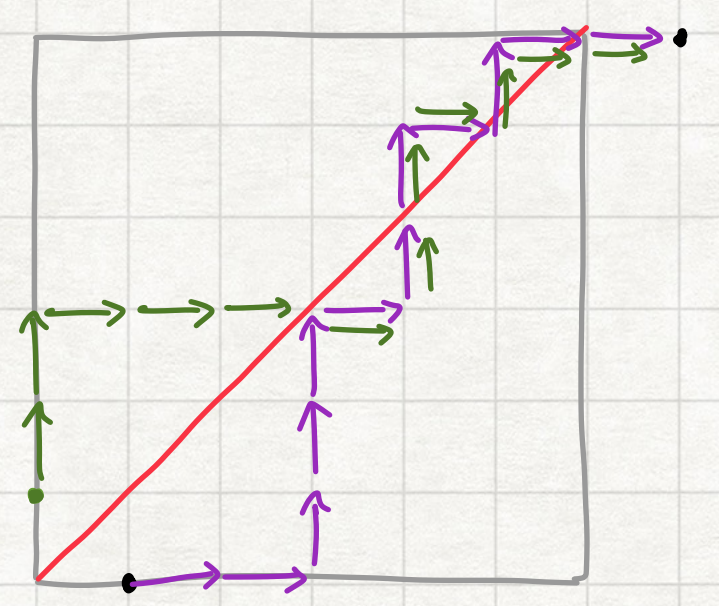
הוכחה דבור



הפסים
הראשונים
שהמסוף סוגל
אם $y=x$

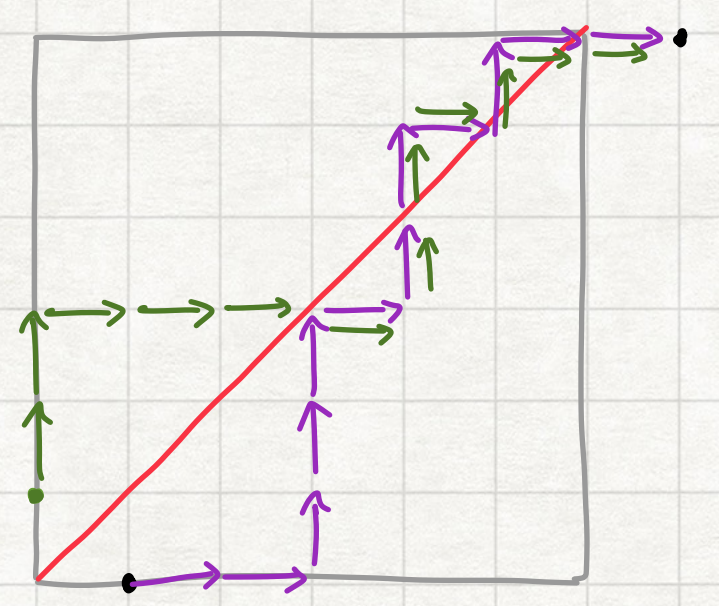
אציג

הפונקציה $f(x,y)$ היא ציור קו המסלולים $(1,0)$ ו- $(n+1,n)$ של המרחב $x=y$
לפניו קל לראות המסלולים $(0,1)$ ו- $(n+1,n)$.



סעיף

הפונקציה $f(x,y)$ היא שילוב בין המסלולים $(1,0) \rightarrow (n+1,n)$ ו- $(0,1) \rightarrow (n+1,n)$.
לפי קד ב המסלולים $(0,1) \rightarrow (n+1,n)$.



סקיצה הוכחה

המרחב \mathbb{R}^2 הוא \mathbb{R} -ווקטור ספצ'ום (שקף מעלה עם שדה \mathbb{R}).

על: ב מסלול $(0,1) \rightarrow (n+1,n)$ חייב להיבחר $y=x$ על פני \hat{y} כדי להגיע לנקודה $(n+1,n)$ ב n ימים.

לפי - פתרון \hat{y} הוא מסור המשתמש בקניאות (\rightarrow, \uparrow) עם $n-1$ \uparrow ו- $n+1$ \rightarrow בסך הכל $\binom{2n}{n-1}$.

תשובה

ישנם דיוקן המשולב הנסוי

(n+1, n) - f (1, 0) - n →, ↑ מסודר מסודר (k

דפדפן העזרה הנסוי.

y=x דיוקן = f(x) ~~כך~~ →, ↑ מסודר מסודר (?

דפד

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{n!n!} \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$= \binom{2n}{n} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

עמוד 1

הוכיח שכל $n \times n$ מטריצה A היא סכום של $1, 2, \dots, 2n$ מטריצות 2×2 :
:ע

אם A היא מטריצה $n \times n$ אז $A = \sum_{i=1}^n A_i$

כאן A_i היא מטריצה 2×2

האם אפשר יהיה?

$\rightarrow 1, 2, 3$

| |
|---|
| 1 |
| 2 |

$n=1$

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 3 | 4 |

| | |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 4 |

$n=2$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 |
| 2 | 4 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 |
| 2 | 4 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 |
| 3 | 5 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 5 |
| 3 | 4 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |

$n=3$

שאלה 1

רוצים למלא את המספרים $1, 2, \dots, 2n$ זוגיים $2 \times n$ כך ש:

(א) כל אחד מהשוני \rightarrow זוגיים

(ב) כל זוגיים \rightarrow זוגיים

כמה אפשרויות יש?

עמוד 1

הוכיח שכל $n \times n$ מטריצה $A = (a_{ij})$ עם $a_{ij} \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ היא סימטרית.

אם A היא סימטרית אז $A^{-1} = A$

אם A היא סימטרית אז $A^2 = I$

כמה אפשרויות יש?

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

סקיט - פתרון

מיקום פתרון
מיקום סקטור

עמוד 1

הוכיח שכל $n \times n$ מטריצה $A = (a_{ij})$ עם $a_{ij} \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ היא מטריצה סימטרית

כל $n \times n$ מטריצה סימטרית

היא מטריצה סימטרית

כמה אפשרויות יש?

| |
|---|
| 1 |
| 2 |

| |
|-----|
| 1 2 |
| 3 4 |

| |
|-----|
| 1 3 |
| 2 4 |

| |
|-------|
| 1 3 5 |
| 2 4 6 |

| |
|-------|
| 1 3 4 |
| 2 5 6 |

| |
|-------|
| 1 2 4 |
| 3 5 6 |

| |
|-------|
| 1 2 5 |
| 3 4 6 |

| |
|-------|
| 1 2 3 |
| 4 5 6 |

סקיצה פתרון

מיקום פתוחים
מיקום סגורים

| |
|--|
| |
|--|

| |
|-------|
| 1 3 5 |
| 2 4 6 |

| |
|-------|
| 1 3 4 |
| 2 4 6 |

| |
|-------|
| 1 2 4 |
| 3 5 6 |

| |
|-------|
| 1 2 5 |
| 3 4 6 |

| |
|-------|
| 1 2 3 |
| 4 5 6 |

() () ()
1 2 3 4 5 6

() ()))
1 2 3 4 5 6

(() ())
1 2 3 4 5 6

(()) ()
1 2 3 4 5 6

((()))
1 2 3 4 5 6

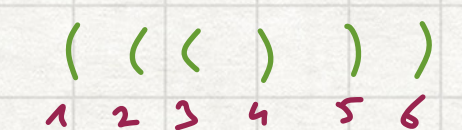
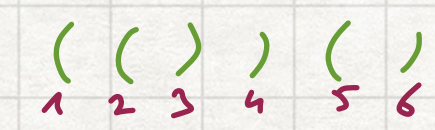
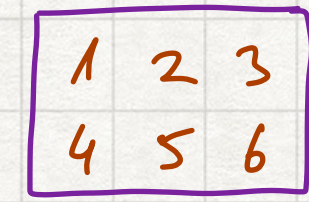
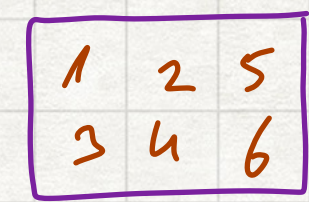
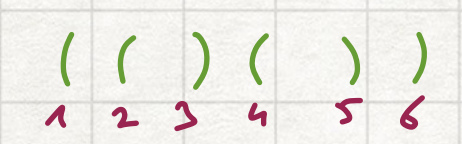
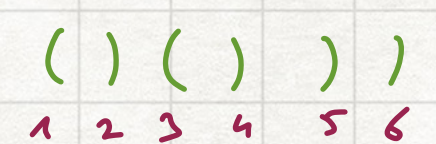
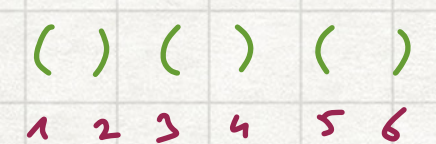
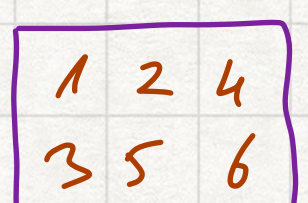
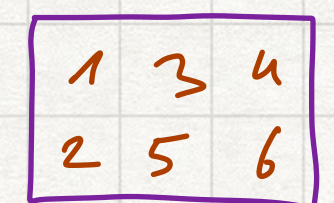
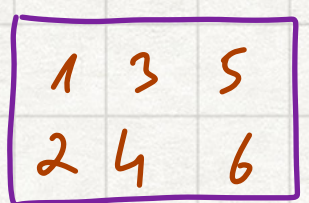
שאלה 1

רוצים למלא את המספרים $1, 2, \dots, 2n$ זוגיים $2 \times n$ כך ש:

(א) כל אה \rightarrow מהשווה עולה

(ב) כל אה \rightarrow עולה

כמה אפשרויות יש?



סקיצה \rightarrow בעזרת

נשים לב כי המעבר מהמספרים $1, 2, \dots, n$ ל- $2, 4, \dots, 2n$ נעשה על ידי

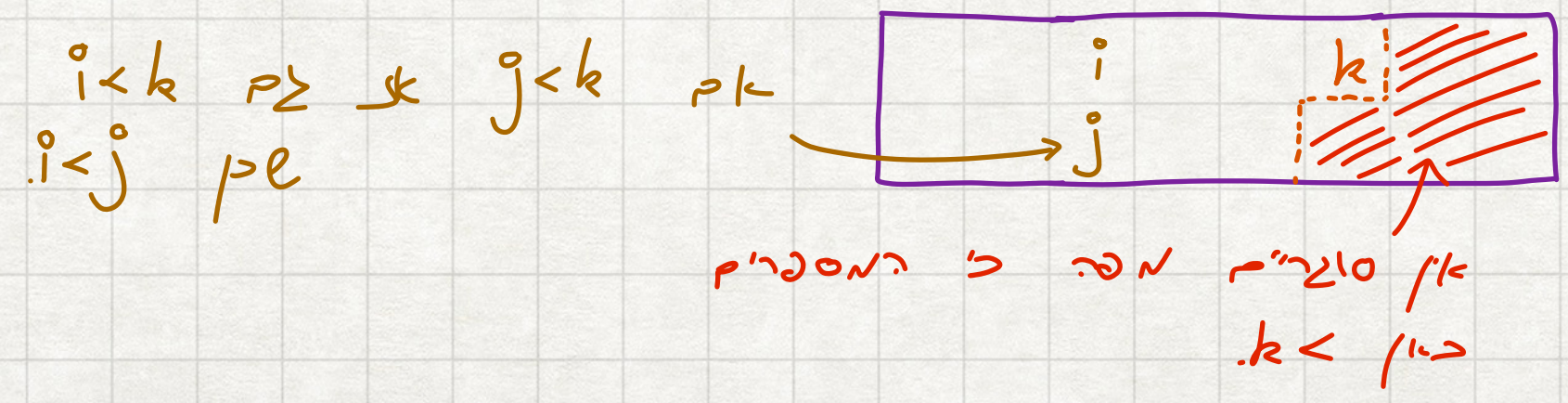
סקיצים חוקיים. אכן, נסתכל על הילד באורך k ונראה שזה

היא k (המקרה השני מאוסף קבוע).

אם זה לא עזר הנה הילד מופיע סקיצים

מחקר הילד המבואר. ועל כל מספר המבואר

$f(n) =$ מספר המבואר (n) .



שאלה 1

הוכיח למלא את המספרים $1, 2, \dots, 2n$ בקופסה $2 \times n$ כך ש:

(א) כל אה \rightarrow מהשווה עולה

(ב) כל אהיה עולה

כמה אפשרויות יש?

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 |
| 2 | 4 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 |
| 2 | 5 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 |
| 3 | 5 | 6 |

() () ()
1 2 3 4 5 6

() ()))
1 2 3 4 5 6

(() ())
1 2 3 4 5 6

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 5 |
| 3 | 4 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |

(()) ()
1 2 3 4 5 6

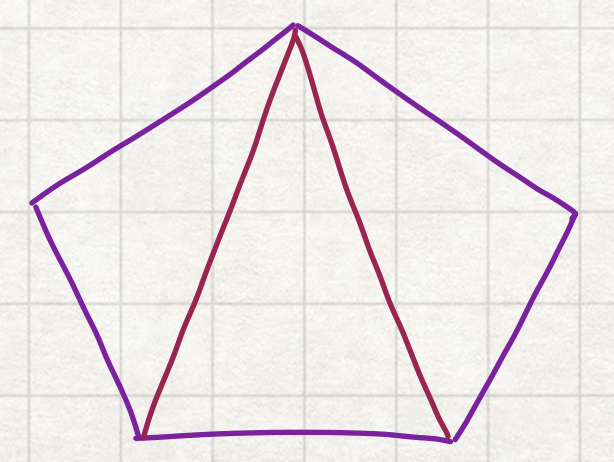
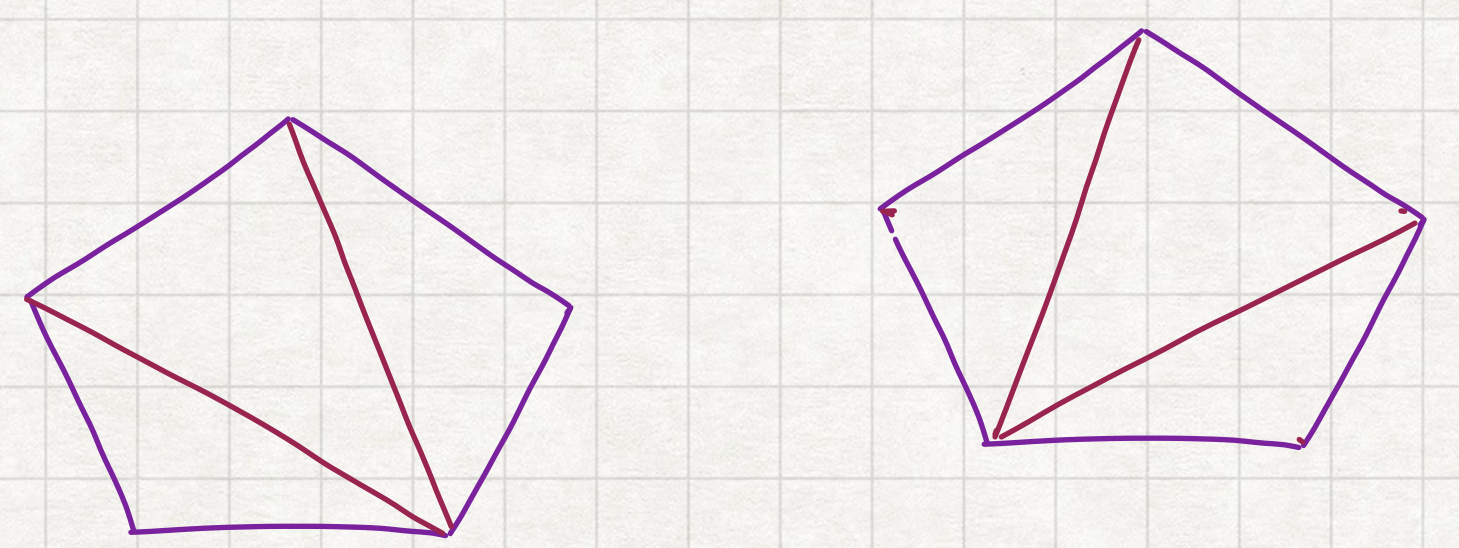
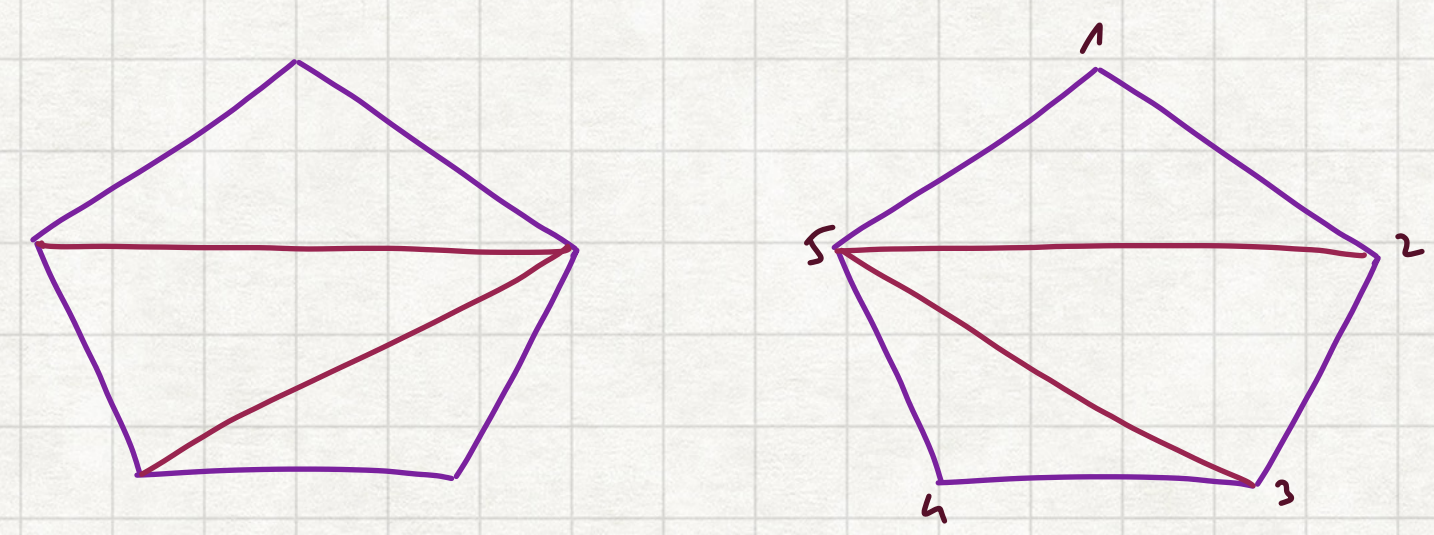
((()))
1 2 3 4 5 6

סקיצה \rightarrow בעיון

את הבינון השני נשאר לבס. התשובה היא לבס n .

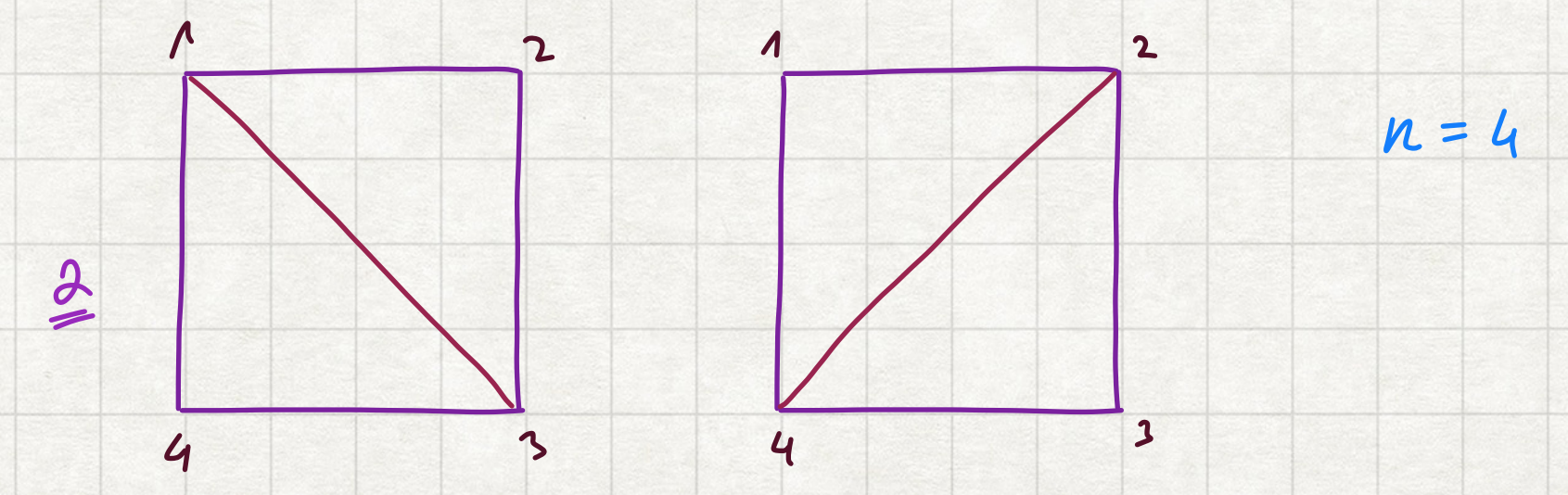
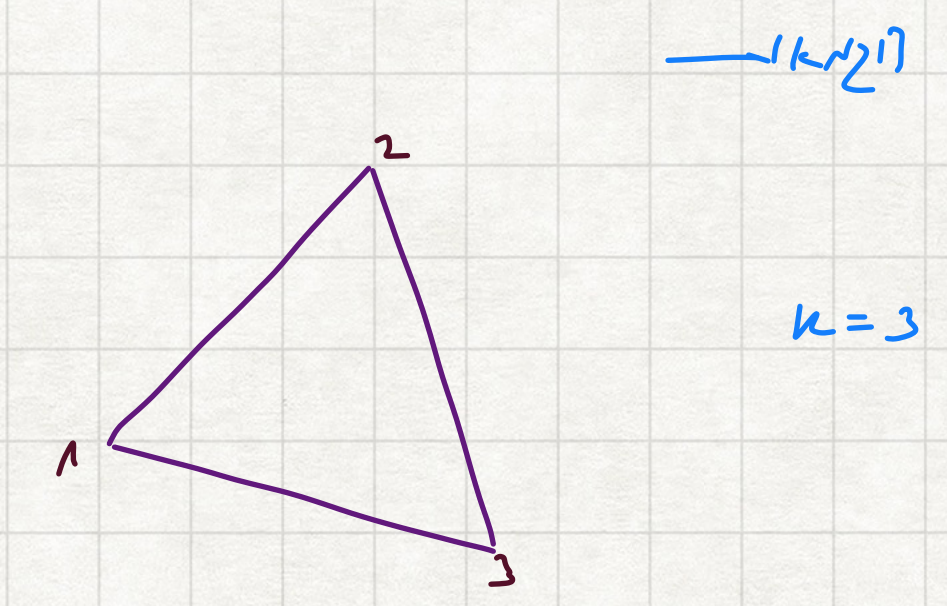
שאלה 2

סריאנטציה של מצולע קמור היא "חלוקה" של המצולע למשולשים.
מה מספר הסריאנטציות של מצולע קמור בעל n צלעות?



|||

$n=5$



שאלה 2

סריאניאלצ'ה של מנדלסון קמרי היא "חלוקה" של המנדלסון למסלול.
מה מסמך הסריאניאלצ'ה של מנדלסון קמרי קרא a בלעז?

פתרון

הרעיון לפתרון שאלה זו הוא למצוא נוסחה נסיגה לכדיה ולגייס אותה להיות נוסחה נסיגה של מספר קטן, אך "מוצג" $= 2$. עם כן התשובה תהיה C_{n-2} .

הערה

צ'ה צולגה למסלול של נוסחה נסיגה לפילצ'ה (בניגוד למסלול צ'ה) "כחצ'ה צ'ה" לקרא נוסחה מסוימת
של האזהרה ה- n בסוף של a . ואכן, אין נוסחה סגורה שכללית למסלול קטן והצורה היחידה לאפשר
לחזות את C_n זמנה n הוא $!$

$$C_n \sim \frac{4^n}{n^{3/2} \sqrt{\pi}}$$

שאלה 2

סריאליזציה של מבוטא קמור היא "חלוקה" של המבוטא למשושים.
 מה מספר הסריאליזציות של מבוטא קמור בדרגה n בלבד?

פתרון

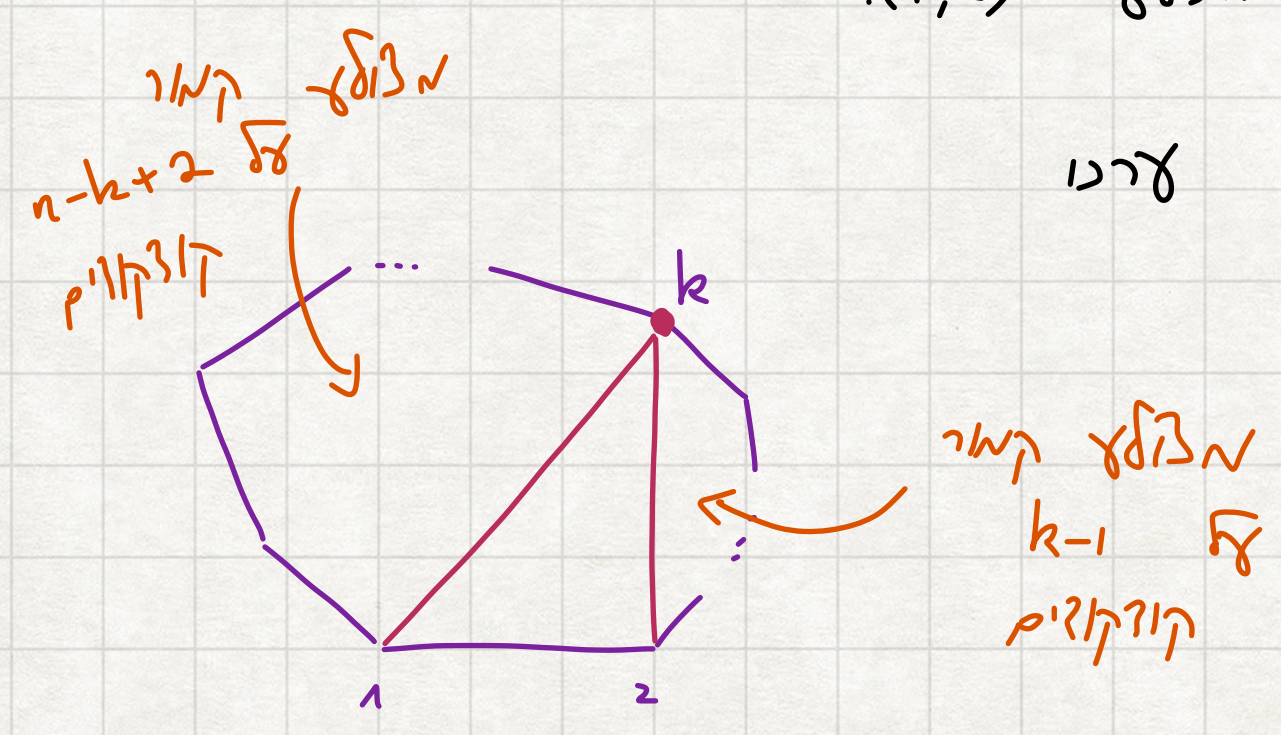
הרעיון לפיתרון שאלה זו הוא למצוא נוסחה נוספת לספירה ולגלות שהיא זהה לנוסחה T_n מספרי קטלן, אך "מוצגת" $n-2$. עם כן התשובה תהיה T_{n-2} .

נסמן T_n את מספר הסריאליזציות של מבוטא קמור עם n בריגים. נסתכל עם הבלע $(1,2)$.

בכל סריאליזציה, בלע זו "סוגרת משולש" עם אחד הקוקונים $3, \dots, n$. נסמך למקרים לפי ערכו

k של הקוקוני n . עם האיור

$$T_n = \sum_{k=3}^n T_{k-1} T_{n-k+2}$$

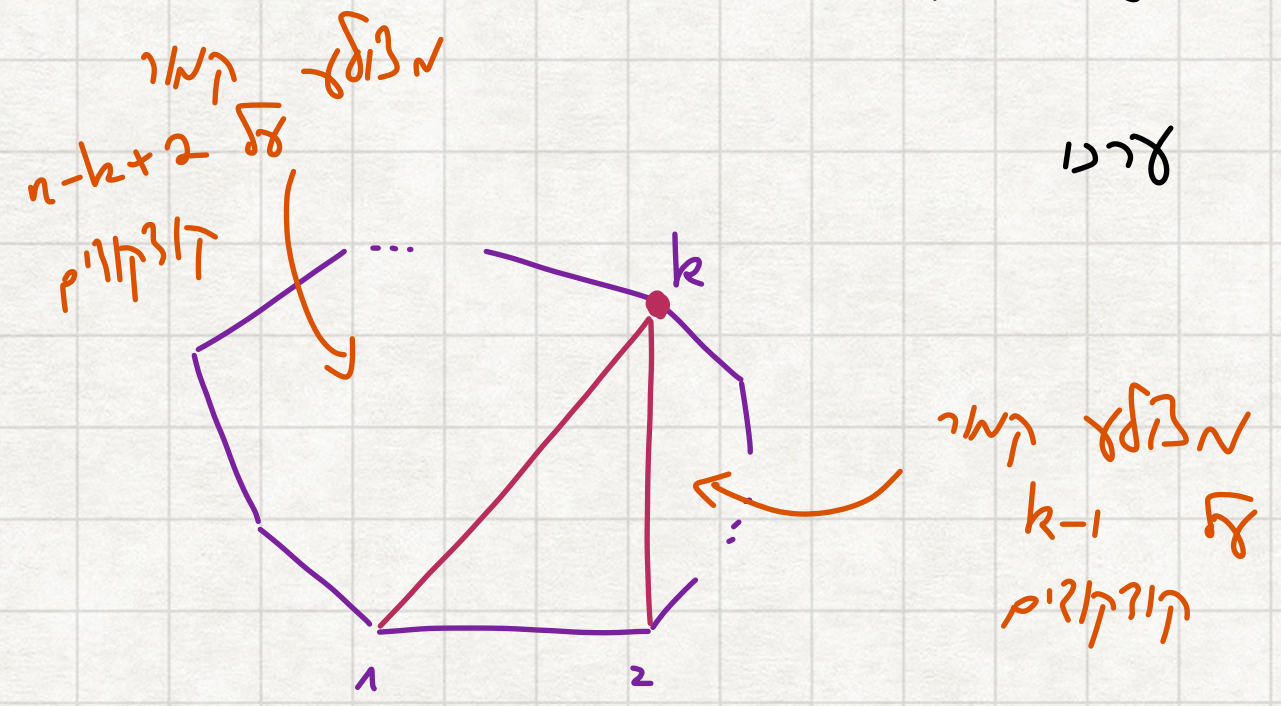


פירוק

הרציון לפירוק שאנחנו באנו אליו הוא למצוא נוסחה נוספת לפעולה ולחלוקה שהיא נכונה לכל $n \geq 2$. מספר קטן, אך "נוסף" $n-2$. עם כן התשובה תהיה C_{n-2} .

נסמן T_n את מספר האינצ'ורים של מצולע קמור עם n צלעות. נסתכל על הצלע $(1,2)$.

כל האינצ'ורים, נמצא בו "סוג" של אחד הקטעים $3, \dots, n$. נסמן את מספרם k של הקטעים עם האורך k .



$$T_n = \sum_{k=3}^n T_{k-1} T_{n-k+2}$$

נבדוק

$$T_4 = \sum_{k=3}^4 T_{k-1} T_{6-k} = T_2 T_3 + T_3 T_2$$

... אכן "יש" $T_3=1$ לא כלל שלם שלם נחלק לפעולה T_2 . יש אינצ'ורים $T_2=0$ ואינצ'ורים $T_2=1$.

וגם נקרא, אכן "יש" $T_4=2$ של $2=2T_2$ ולכן כזוהי מהקשר $T_2=1$ ומכאן $T_4=2$.

פירוק

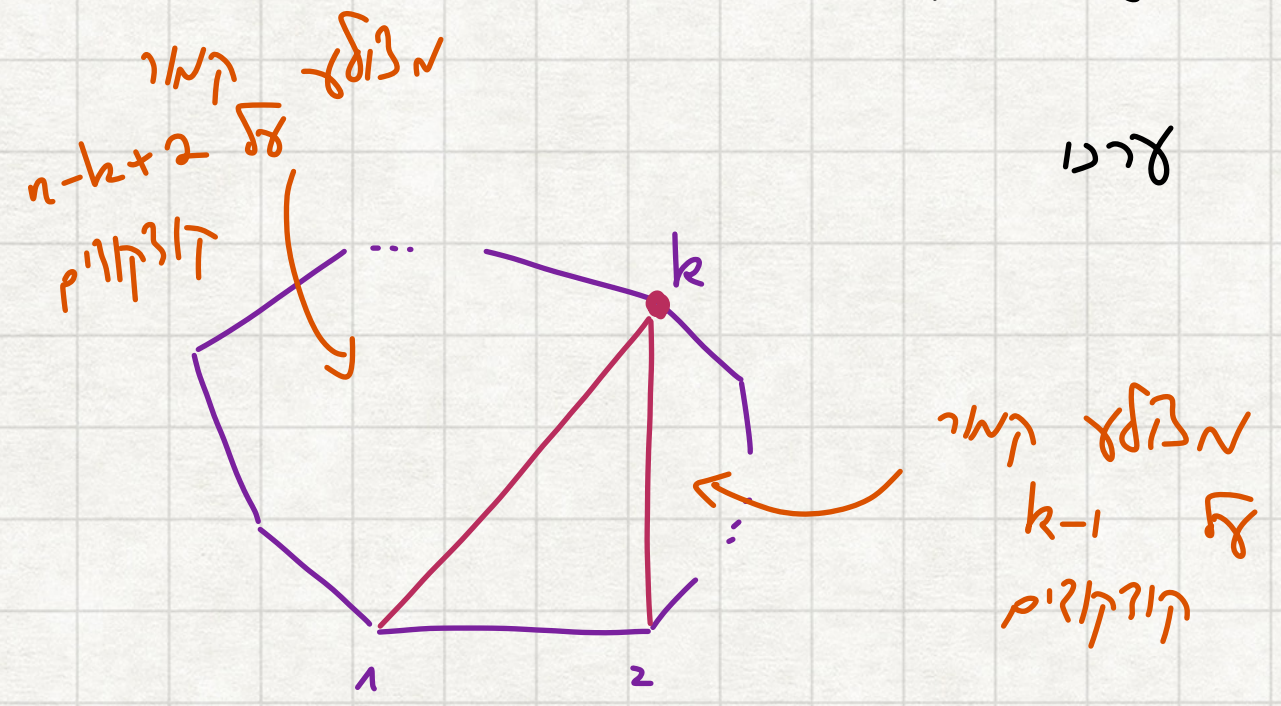
הרציון לפירוק של T_n הוא למצוא נוסחה נוספת לפעולה ולחלוקה שהיא T_{n-2} .
מספר קטן, אך "מפוצץ" $= 2$. עם n התשובה תהיה T_{n-2} .

נסמן T_n את מספר האינצ'ורים של מצולע קמור עם n צלעים. נסתכל על הצלע $(1,2)$.

כל האינצ'ורים, נמצא "סוג" של אינצ'ורים $3, \dots, n$. נספור את האנשים

k של קווקזים. עם האיור

$$T_n = \sum_{k=3}^n T_{k-1} T_{n-k+2}$$



צדק פשוט

$$T_4 = \sum_{k=3}^4 T_{k-1} T_{4-k} = T_2 T_3 + T_3 T_2$$

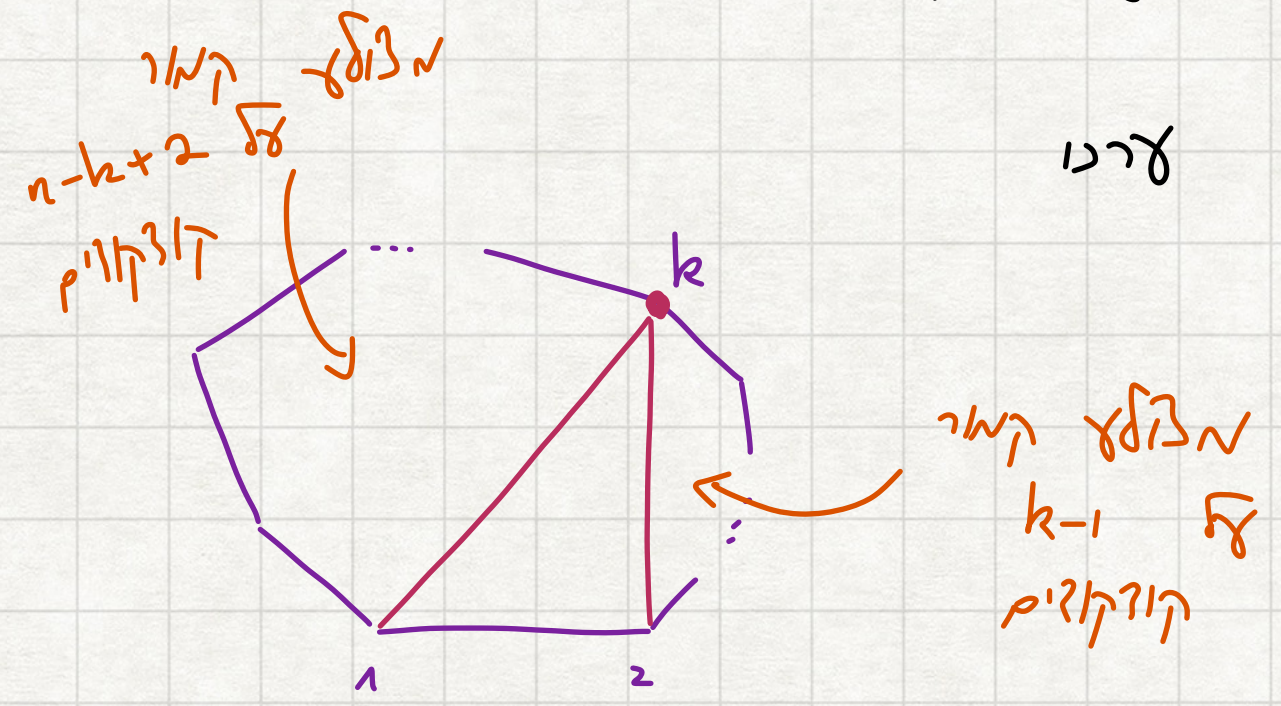
$$T_5 = T_2 T_4 + T_3 T_3 + T_4 T_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$$

פירוק

הרציון לפירוק שאנחנו באנו אליו הוא למצוא נוסחה נוספת לפעולה ולחלוקה שהיא נכונה לכל $n \geq 2$. מספר קטן, אך "מושג" $n-2$.

נסמן T_n את מספר האינצ'ורים של מצולע קמור עם n צלעות. נסתכל על הצלע $(1,2)$.

כל האינצ'ורים, נמצא "סוג" של אינצ'ורים $3, \dots, n$. נספור את האינצ'ורים k של קווקזים עם האורך k .



$$T_n = \sum_{k=3}^n T_{k-1} T_{n-k+2}$$

צדק נכונה

$$T_4 = \sum_{k=3}^4 T_{k-1} T_{4-k} = T_2 T_3 + T_3 T_2$$

$$T_5 = T_2 T_4 + T_3 T_3 + T_4 T_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$$

$$T_6 = T_2 T_5 + T_3 T_4 + T_4 T_3 + T_5 T_2 = 5 + 2 + 2 + 5 = 14$$

עוד יצרנו נוסחה נוספת — נוסחה — קל למצוא בעזרתם כי עובד נכון בעזרת אינדוקציה / אינצ'ורים.

$$T_n = \sum_{k=3}^n T_{k-1} T_{n-k+2}$$

פונקציה

היא כי

$$C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k}$$

היא כי

$$T_{n+2} = C_n \quad \Rightarrow \quad n \text{ היא קוארנט}$$

$$(T_3 = 1 = C_1 \quad \rho(1)) \quad T_2 = 1 = C_0 \quad : \text{סוף}$$

כלומר T_n היא קוארנט n

$$T_{n+2} = \sum_{k=3}^{n+2} T_{k-1} T_{n+2-k+2}$$

$$= \sum_{k=3}^{n+2} T_{k-1} T_{n-k+4}$$

$$= \sum_{k=1}^n T_{k+1} T_{n-k+2}$$

$$T_n = \sum_{k=3}^n T_{k-1} T_{n-k+2}$$

פיתרון
האלן כי

$$C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k}$$

אלכסור כי

$$T_{n+2} = \sum_{k=3}^{n+2} T_{k-1} T_{n+2-k+2}$$

$$= \sum_{k=3}^{n+2} T_{k-1} T_{n-k+4}$$

$$= \sum_{k=1}^n T_{k+1} T_{n-k+2}$$

הנחה האינדוקציה \rightarrow $= \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k}$

$$= C_n$$

עזרי על קטן

מסביר קטן מופיע באנסטר מקרים. למשל אם ניקח מטריצה מקרה סימטרית עם כנסות $\neq 1$
 הנקרות באוק דלת גלוי (כפי לעזרה להמחייה סימטרית) אז הכולא קואסטר והשדה גורס כי
 המאטר ה-מני של הערכים העצמיים של המטריצה הוא C_n ∇

עזרי קורא (הקטור למטריצה לעל) הוא ∇

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 t^{2n} \sqrt{4-t^2} dt$$

$$\det \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \dots & C_n \\ C_1 & C_2 & \dots & & C_{n+1} \\ \vdots & & & & \\ C_n & \dots & & & C_{2n} \end{pmatrix} = 1$$

אדסיום