צהויות קומבינטוריות

גיל כהן

שאלה 1

הוכיחו כי לכל $0 \leq k \leq n$ מתקיים

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

שאלה 1

הוכיחו כי לכל $0 \leq k \leq n$ מתקיים

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

פתרון אריתמטי

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{n-k}$$

שאלה 1

הוכיחו כי לכל $0 \le k \le n$ מתקיים

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

פתרון קומבינטורי

$\binom{n}{k}$ = מספר הדרכים לבחור k איבר מתוך n (בלי חזרות וללא חשיבות לסדר).

אבל בחירה של אילו $n-k$ איברים "יישארו בחוץ" שקולה לבחירת k איברים.

פורמלית ישנו הזיווג:

$$f : \{A \subseteq [n] \mid |A| = k\} \longrightarrow \{B \subseteq [n] \mid |B| = n-k\}$$

$$A \longmapsto [n] \setminus A$$

גודל קבוצה זו הוא $\binom{n}{k}$

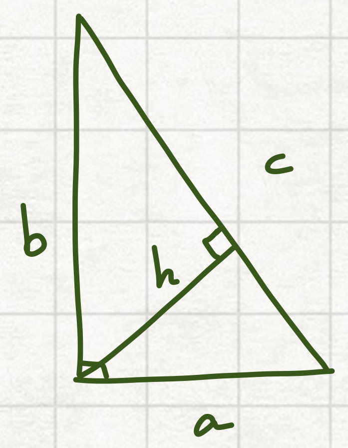
קבוצה בגודל $\binom{n}{n-k}$

ספירה כפולה

לעיתים נרצה להראות ששני ביטויים שווים. ספירה כפולה (Double counting) היא דרך לעשות זאת ע"י כך שמראים ששני הביטויים שווים לגודל שלישי. באופן ספציפי, בקומבינטוריקה מראים ששני הביטויים הם גודל קבוצה נתונה כפי שנספר בשתי דרכים שונות.

שאלה 2

הוכיחו כי $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$



הוכיחו כי $ab = ch$

שאלה 2

הוכיחו כי $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

פתרון

נשאל - מהו מספר המחרוזות הבינאריות באורך n?

מכלל הכפל: לכל כניסה במחרוזת יש 2 אפשרויות

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

מספר המחרוזות הבינאריות עם בדיוק k אחדים

חלוקה לפי מספר האחדים במחרוזת, k, ושימוש בעיקרון החיבור

שאלה 3

מהו ערכו של הביטוי $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$?

שאלה 3

מהו ערכו של הביטוי $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$?

ננסה את $n=3$

$$\binom{3}{0} - \binom{3}{1} + \binom{3}{2} - \binom{3}{3} = 0$$

שאלה 3

מהו ערכו של הביטוי $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$?

ננסה את $n=3$

$$\binom{3}{0} - \binom{3}{1} + \binom{3}{2} - \binom{3}{3} = 0$$

אותו דבר עבור $n=5$

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{2} + \binom{5}{4}$$

$$- \left[\binom{5}{5} + \binom{5}{3} + \binom{5}{1} \right] = 0$$

שאלה 3

מהו ערכו של הביטוי $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$?

נבדוק כללי עבור n אי-זוגי

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k\binom{n}{k}+(-1)^{n-k}\binom{n}{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k\underbrace{\left(\binom{n}{k}-\binom{n}{k}\right)}_{=0} = 0$$

שאלה 3

מהו ערכו של הביטוי $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$?

מה אם n זוגי?

ננסה $n=2$

$$\binom{2}{0} - \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 1-2+1 = 0$$

שאלה 3

מהו ערכו של הביטוי $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$?

מה אם n זוגי?

ננסה $n=2$

$$\binom{2}{0} - \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 1 - 2 + 1 = 0$$

אוקי... $n=4$:

$$\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$$

שאלה 3

מהו ערכו של הביטוי $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$?

מה אם n זוגי?

ננסה $n=2$

$$\binom{2}{0} - \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 1 - 2 + 1 = 0$$

אולי... $n=4$:

$$\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$$

ועבור $n=6$:

$$\binom{6}{0} - \binom{6}{1} + \binom{6}{2} - \binom{6}{3} + \binom{6}{4} - \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$$

$$1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1$$

שאלה 3

מהו ערכו של הביטוי $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$?

פתרון

נראה להראות שמספר תתי הקבוצות של $[n]$ בגודל זוגי שווה למספר תתי הקבוצות של $[n]$ שגודלן אי-זוגי, כלומר

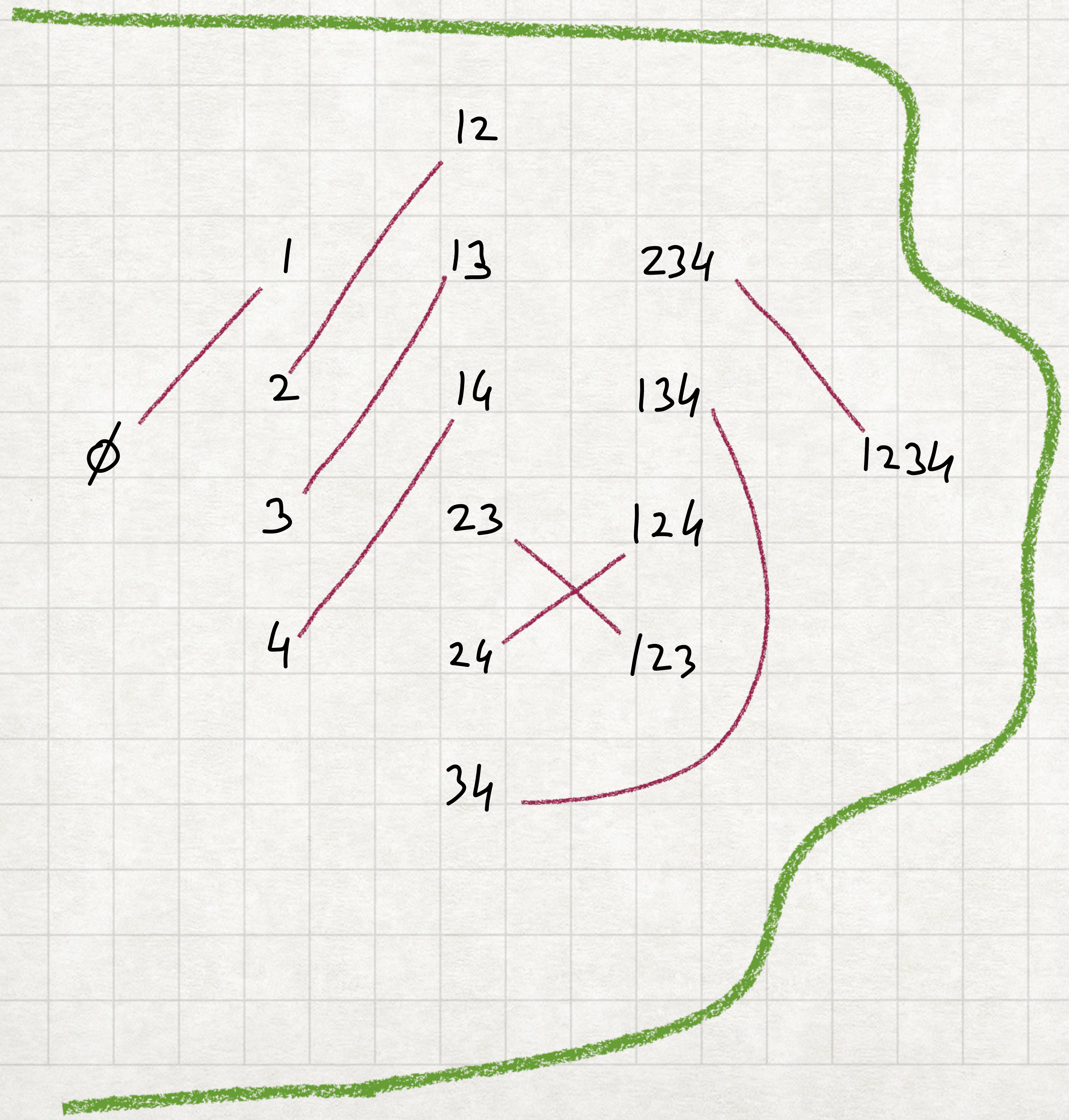
$$\sum_{\substack{k=0 \\ \text{זוגי}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ \text{אי זוגי}}}^{n} \binom{n}{k}$$

נגדיר

$$f : \{ A \subseteq [n] \mid |A| \ \text{זוגי} \} \longrightarrow \{ B \subseteq [n] \mid |B| \ \text{אי זוגי} \}$$

f זיווג!

$$A \longmapsto \begin{cases} A \setminus \{1\} & 1 \in A \\ A \cup \{1\} & 1 \notin A \end{cases}$$



שאלה 4

הוכיחו כי לכל $0 \le k \le n$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

שאלה 4

הוכיחו כי לכל $0 \le k \le n$ מתקיים

פתרון

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

הכתרנו מלך

פשוטי העם שנאמנים אליו

כלומר נשאל - כמה תתי קבוצות של $[n]$ ישנן עם איבר מסומן (המלך).

דוגמה $n=3$

$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}2$	$\hat{2}1$	$\hat{3}1$
$\hat{1}3$	$\hat{2}3$	$\hat{3}2$
$\hat{1}23$	$\hat{2}13$	$\hat{3}12$

$\underline{\underline{12}}$

שאלה 4

הוכיחו כי לכל $0\le k\le n$ מתקיים

פתרון

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}$$

הכתרנו מלך

פשוטי העם שנאמנים אליו

דוגמה $n=3$

$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}2$	$\hat{2}1$	$\hat{3}1$
$\hat{1}3$	$\hat{2}3$	$\hat{3}2$
$\hat{1}23$	$\hat{2}13$	$\hat{3}12$

$\underline{\underline{12}}$

כלומר נשאל - כמה תתי קבוצות של $[n]$ ישנן עם איבר מסומן (המלך).

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k$$

להכתיר מלך

לבחור k איברים למלוכה

חלוקה למקרים לפי גודל הקבוצה