עיקרון דחיית המדידה

1 האם חייבים למדוד באמצע?

ביחידה הקודמת הגדרנו מעגל קוונטי כרצף של שערים יוניטריים, שבסופו מודדים ומקבלים פלט קלאסי. אבל לכאורה זו הגבלה משמעותית. אולי כדאי למדוד קיוביט באמצע החישוב, ובהתאם לתוצאה להחליט איזה שער להפעיל בהמשך?

עיקרון דחיית המדידה אומר שאפשר לדמות גם חישוב כזה, בלי למדוד עד הסוף. לשם כך נוסיף קיוביטי עזר ונחליף החלטות המבוססות על תוצאות מדידה בשערים מבוקרים. התפלגות הפלט תישאר אותה התפלגות.

חשוב לשים לב: לא מדובר פשוט בהזזת סימני המדידה ימינה בתרשים. נצטרך לשנות גם את המעגל.

2 דוגמה ראשונה

נניח שיש לנו שני קיוביטים במצב

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |\psi\rangle, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

נמדוד את הקיוביט הראשון בבסיס הסטנדרטי. אם נקבל אפס, לא נעשה דבר; אם נקבל אחד, נפעיל שער יוניטרי U על הקיוביט השני.

כלומר, בהסתברות $|\alpha|^2$ נקבל את התוצאה אפס והקיוביט השני יישאר במצב $|\psi\rangle$; ובהסתברות $|\beta|^2$ נקבל את התוצאה אחד והקיוביט השני יהיה במצב $U|\psi\rangle$.

כעת נבצע פעולה אחרת: במקום למדוד, נפעיל שער U מבוקר, כשהקיוביט הראשון הוא קיוביט הבקרה. נקבל

$$\alpha|0\rangle|\psi\rangle + \beta|1\rangle U|\psi\rangle.$$

רק עכשיו נמדוד את הקיוביט הראשון.

נקבל בדיוק אותן הסתברויות, ובהינתן תוצאת המדידה, בדיוק אותו מצב של הקיוביט השני. לכן גם כל חישוב נוסף שנבצע על הקיוביט השני ייתן אותן סטטיסטיקות.

בדוגמה הזו אפשר להשתמש בקיוביט הראשון עצמו בתור זיכרון לתוצאה. אבל מה אם נרצה להמשיך לבצע עליו פעולות? לשם כך נשתמש בקיוביט עזר.

3 שומרים את התוצאה בלי למדוד

נסמן את הקיוביט שאותו רוצים למדוד ב־ A, ואת שאר המערכת ב־ R. המצב המשותף שלהם ניתן לכתיבה בצורה

$$|\Psi\rangle_{AR} = |0\rangle_A |\phi_0\rangle_R + |1\rangle_A |\phi_1\rangle_R .$$

כאן הווקטורים $|\phi_0\rangle$ ו־ $|\phi_1\rangle$ אינם בהכרח מנורמלים, וגם אינם בהכרח אורתוגונליים. מתקיים

$$\|\phi_0\|^2 + \|\phi_1\|^2 = 1.$$

הכתיבה הזו כוללת גם את המקרה שבו A שזור עם שאר המערכת.

אם נמדוד את A, נקבל תוצאה $b \in \{0,1\}$ בהסתברות

$$p_b = \|\phi_b\|^2.$$

בהינתן תוצאה שהסתברותה חיובית, המצב לאחר המדידה יהיה

$$\frac{|b\rangle_A |\phi_b\rangle_R}{\sqrt{p_b}}.$$

במקום למדוד, נוסיף קיוביט חדש B במצב $|0\rangle$, ונפעיל CNOT מ־ A אל B. בסדר האוגרים A, R, B, נקבל

$$|0\rangle_A |\phi_0\rangle_R |0\rangle_B + |1\rangle_A |\phi_1\rangle_R |1\rangle_B .$$

הקיוביט B ישמש כזיכרון לתוצאה. לא מדדנו אותו, ובדרך כלל הוא שזור עם שאר המערכת. ובכל זאת, אם נמדוד אותו בבסיס הסטנדרטי, נקבל בדיוק את התוצאה ואת המצב המותנה שהיינו מקבלים במדידה המקורית.

כעת נניח שאחרי המדידה המקורית התכוונו להפעיל V_b על המערכת AR, בהתאם לתוצאה b. שימו לב שהפעולה הזו יכולה לפעול גם על הקיוביט A עצמו.

במעגל החדש נפעיל את הפעולה המבוקרת

$$W = V_0 \otimes |0\rangle\langle 0|_B + V_1 \otimes |1\rangle\langle 1|_B .$$

זו פעולה יוניטרית: בכל אחד משני תתי־המרחבים האורתוגונליים שמוגדרים על ידי B מופעלת פעולה יוניטרית.

המצב שיתקבל הוא

$$\sum_{b\in\{0,1\}} V_b(|b\rangle_A |\phi_b\rangle_R) \otimes |b\rangle_B .$$

נמדוד כעת את B. מכיוון ש־ V_b שומר נורמות, ההסתברות לקבל b היא עדיין p_b. בהינתן התוצאה הזו, מצב המערכת האחרת הוא

$$\frac{V_b(|b\rangle_A |\phi_b\rangle_R)}{\sqrt{p_b}}.$$

זהו בדיוק המצב שמתקבל בתהליך המקורי: קודם מדידה, ואחריה הפעולה המתאימה לתוצאה.
לכן מתקבלת אותה התפלגות משותפת של תוצאת המדידה ושל כל פלט שנפיק בהמשך מהמערכת.

4 העיקרון הכללי

משפט 4.1 (עיקרון דחיית המדידה)**.** *לכל מעגל קוונטי סופי הכולל מדידות בבסיס הסטנדרטי ופעולות המותנות בתוצאותיהן, קיים מעגל עם קיוביטי עזר שבו כל המדידות מתבצעות בסוף, והתפלגות הפלט הקלאסי שלו זהה לזו של המעגל המקורי.*

אפשר לשמר גם את ההתפלגות המשותפת של כל תוצאות המדידות המקוריות ושל הפלט.

הבנייה חוזרת על אותו רעיון בכל מדידת ביניים:

1. מוסיפים קיוביט עזר חדש במצב $|0\rangle$, ובמקום למדוד מפעילים אליו שער CNOT מהקיוביט שאותו רצינו למדוד.
2. בכל מקום שבו השתמשנו בתוצאת המדידה כביט בקרה קלאסי, משתמשים כעת בקיוביט העזר כבקרה קוונטית.
3. שומרים את קיוביט העזר עד סוף החישוב, ומודדים אותו רק אז בבסיס הסטנדרטי.

מדוע צריך קיוביט חדש בכל פעם? כי תוצאת המדידה הישנה היא חלק מההיסטוריה של החישוב. גם אם בתוכנית הקלאסית היינו דורסים אותה, בסימולציה נשמור אותה באוגר נפרד.

אם ההחלטה מה לעשות תלויה בכמה תוצאות מדידה, נחשב את ההחלטה באופן הפיך על אוגרי התוצאות, כפי שלמדנו ביחידה הקודמת, ונשתמש בתוצאת החישוב כבקרה.

כך, בכל שלב, לכל היסטוריית תוצאות יש רכיב נפרד בסופרפוזיציה. אוגרי התוצאות שומרים היסטוריות שונות במצבי בסיס אורתוגונליים. מדידה שלהם בסוף בוחרת היסטוריה בדיוק בהסתברות שבה הייתה מתקבלת בתהליך המקורי.

כאשר מספר צעדי החישוב חסום פולינומית וגם העיבוד הקלאסי של התוצאות יעיל, הבנייה כרוכה בתקורה פולינומית. כרגיל, בשימוש באוסף שערים אוניברסלי קבוע, ייתכן שנצטרך לקרב את השערים המבוקרים; אפשר לבחור את דיוק הקירוב כך שהשגיאה הכוללת תהיה קטנה כרצוננו.

4.1 ומה לגבי בסיס אחר?

נניח שרוצים למדוד קיוביט בבסיס אורתונורמלי $\{|v_0\rangle, |v_1\rangle\}$. נבחר שער יוניטרי T המקיים

$$T|v_b\rangle = |b\rangle .$$

נפעיל את T, נעתיק את ערך הבסיס לקיוביט עזר בעזרת CNOT, ואז נפעיל $T^\dagger$ על הקיוביט המקורי.

כך מתקבלת הפעולה

$$|v_b\rangle_A |0\rangle_B \longmapsto |v_b\rangle_A |b\rangle_B .$$

לכן אותו טיעון עובד גם למדידה בבסיס הזה. החזרה באמצעות $T^\dagger$ מבטיחה שגם המצב שנותר בקיוביט המקורי מתאים למדידה שרצינו לדמות.

5 מה העיקרון אינו אומר?

העיקרון אינו אומר שאפשר למחוק מדידה מהמעגל בלי להחליף אותה במשהו אחר.

למשל, נתחיל במצב $|+\rangle$, נמדוד בבסיס הסטנדרטי, נפעיל H ונמדוד שוב בבסיס הסטנדרטי. תוצאת המדידה האחרונה תהיה ביט אקראי אחיד.

לעומת זאת, אם פשוט נשמיט את המדידה הראשונה, נקבל

$$|+\rangle \xrightarrow{H} |0\rangle ,$$

ולכן התוצאה האחרונה תהיה תמיד אפס.

בסימולציה הנכונה נשמור את התוצאה בקיוביט עזר:

$$|+\rangle_A |0\rangle_B \xrightarrow{\text{CNOT}} \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \xrightarrow{H_A} \frac{|+\rangle_A |0\rangle_B + |-\rangle_A |1\rangle_B}{\sqrt{2}}.$$

מדידת A בבסיס הסטנדרטי נותנת כעת ביט אקראי אחיד, כפי שרצינו.

יש כאן גם הבדל מביטול הפסולת של היחידה הקודמת: כאן אוגר התוצאה שומר את ההבחנה בין ענפים שונים. אי אפשר להניח שמותר לנקות אותו או לערבב את ערכיו בלי לשנות את החישוב.

המסקנה היא שבמודל החישוב שלנו אפשר להסתפק בשערים יוניטריים ובמדידות בסוף, בלי לאבד כוח חישובי. זו טענה על סימולציה ועל התפלגות הפלט; אין פירושה שמדידות ביניים אינן מועילות במימוש מעשי, או שהמצב הפיזיקלי בכל רגע זהה בשני התהליכים.

תרגיל 5.1. מתחילים במצב $|+\rangle$, מודדים בבסיס הסטנדרטי, ואם התוצאה היא אחד מפעילים X על הקיוביט שנמדד.

מהו מצב הקיוביט בסוף? בנו מעגל ללא מדידת ביניים המדמה את התהליך בעזרת קיוביט עזר אחד. כתבו את המצב המשותף אחרי כל שער, ובדקו היכן נשמרה תוצאת המדידה המקורית.