עיקרון שובך היונים

גיל כהן

עיקרון שובך היונים

אם שמים $n+1$ יונים ב-n שובכים אז יהיה שובך עם לפחות 2 יונים.

הוכחה

דה.

ניסוח יותר פורמלי

אם $f:[n+1]\to[n]$ אז f לא חח"ע.

שאלה 1

הוכיחו כי בכל תת קבוצה של $\{0,1,2,\dots,9\}$ מגודל 6, יש שני איברים שסכומם 9.

שאלה 1

הוכיחו כי בכל תת קבוצה של $\{0,1,2,\dots,9\}$ מגודל 6, יש שני איברים שסכומם 9.

פתרון

איברי הקבוצה

נסתכל על חמש הקבוצות הבאות

$$\{0,9\},\quad \{1,8\},\quad \{2,7\},\quad \{3,6\},\quad \{4,5\}$$

שובך 1   שובך 2   . . .   שובך 5

מעיקרון שובך היונים, כל תת קבוצה מגודל 6 מכילה את כל איברי אחת מהקבוצות הנ"ל.

שאלה 2

תהא $A \subseteq [2n]$, ו- $|A| \geq n+1$. הוכיחו כי קיימים שני מספרים ב- A

כך שהאחד מתחלק (ללא שארית) באחר.

שאלה 2

תהא $A \subseteq [2n]$, $|A| \geq n+1$. הוכיחו כי קיימים שני מספרים ב- A כך שהאחד מתחלק (ללא שארית) באחר.

פתרון

נסמן את איברי A ב- $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$, ונכתוב

$$x_i = 2^{k_i} \cdot b_i$$

כאשר $k_i \geq 0$ שלם ו- b_i אי-זוגי.

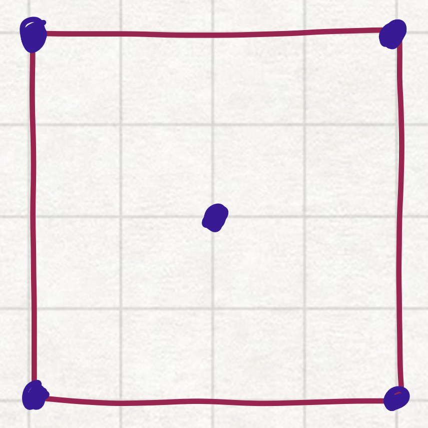
מכיוון שישנם n מספרים אי-זוגיים ב- $[2n]$ ומכיוון ש- $b_1, \dots, b_{n+1} \in [2n]$

נקבל, מעיקרון שובך היונים כי $b_i = b_j$ עבור זוג כלשהו $i<j$.

$$\Leftarrow \quad x_i = 2^{k_i} b_i = 2^{k_i} b_j \mid 2^{k_j} b_j = x_j$$

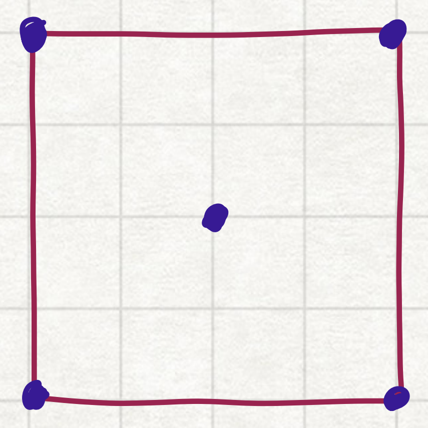
שאלה 3

בתוך ריבוע שאורך צלעו 2 נתונות 5 נקודות שונות.
הוכיחו כי קיימות 2 נקודות שונות שהמרחק ביניהן
אינו עולה על $\sqrt{2}$.



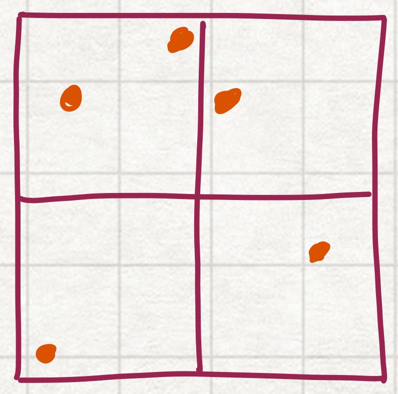
שאלה 3

בתוך ריבוע שאורך צלעו 2 נתונות 5 נקודות שונות.
הוכיחו כי קיימות 2 נקודות שונות שהמרחק ביניהן
אינו עולה על $\sqrt{2}$.



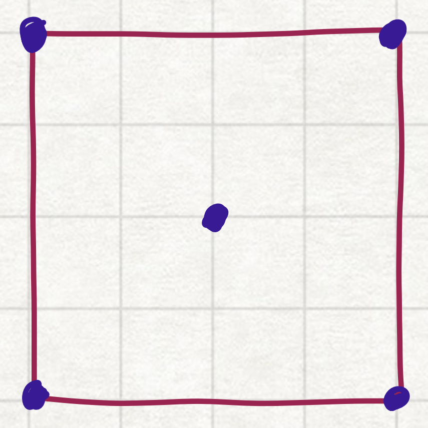
פתרון

נחלק את הריבוע כמו בציור. מעיקרון שובך היונים
שתי נק' לפחות נמצאות באותו ריבוע 1×1 ולכן
המרחק בין שתי נק' אלו $\leq \sqrt{2}$.



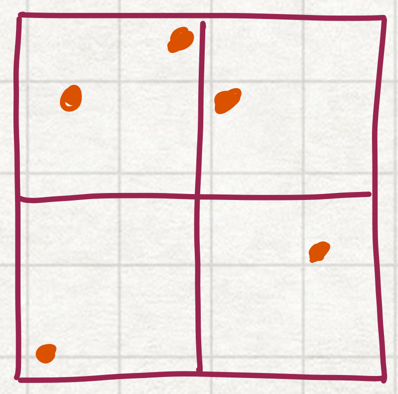
שאלה 3

בתוך ריבוע שאורך צלעו 2 נתונות 5 נקודות שונות.
הוכיחו כי קיימות 2 נקודות שונות שהמרחק ביניהן
אינו עולה על $\sqrt{2}$.



פתרון

נחלק את הריבוע כמו בציור. מעיקרון שובך היונים
שתי נק' לפחות נמצאות באותו ריבוע 1×1 ולכן
המרחק בין שתי נק' אלו $\leq \sqrt{2}$.



שאלה 4

הוכיחו כי קיים מספר טבעי שכל ספרותיו 7 שמתחלק ב-13.

פתרון לא מומלץ

להתחיל ולבדוק. ובכל מקרה, אם תעשו זאת תיווכחו רק שהמספר

הראשון מהצורה הזו המתחלק ב-13 הוא $777,777 = 13 \cdot 59,829$

שאלה 4

הוכיחו כי קיים מספר טבעי שכל ספרותיו 7 שמתחלק ב-13.

פתרון לא מומלץ אחר

ישנו מבחן לחלוקה ב-13: מספר מתחלק ב-13 אמ"ם לאחר שמוסיפים למספר ללא ספרת האחדות את ספרת האחדות מוכפלת ב-4, מקבלים מספר שמתחלק ב-13.

$$777 \longrightarrow 77+7\cdot 4 = 105 \longrightarrow 10+5\cdot 4 = 30$$

$$7777 \longrightarrow 777+7\cdot 4 = 805 \longrightarrow 80+5\cdot 4 = 100 \longrightarrow 10+0\cdot 4 = 10$$

בשני הפתרונות הללו עשינו יותר מדי - ניסינו למצוא מספר כנדרש במקום להוכיח את קיומו.

שאלה 4

הוכיחו כי קיים מספר טבעי שכל ספרותיו 7 שמתחלק ב-13.

פתרון

נסתכל על 13 המספרים $7, 77, 777, \ldots, \underbrace{77\cdots7}_{13\text{ ספרות}}$.

אם אחד מהם מתחלק ב-13 - סיימנו!

אחרת 13 המספרים לעיל משאירים שארית מבין $\{1, 2, \ldots, 12\}$ בחלוקה ל-13.

מעיקרון שובך היונים, שניים מתוכם משאירים את אותה השארית ולכן הפרשם מתחלק ב-13.

$$13 \mid \underbrace{77\cdots7}_{a} - \underbrace{77\cdots7}_{b} = \underbrace{777\cdots7}_{a-b}\underbrace{00\cdots0}_{b}$$

שאלה 4

הוכיחו כי קיים מספר טבעי שכל ספרותיו 7 שמתחלק ב-13.

פתרון

$$13 \mid \underbrace{77\cdots7}_{a} - \underbrace{77\cdots7}_{b} = \underbrace{777\cdots7}_{a-b}\underbrace{00\cdots0}_{b}$$

מכיוון ש-13 ראשוני שאינו מחלק את 10^b מתקיים ש $13 \mid \underbrace{7\cdots7}_{a-b}$

ואכן, רגע של תורת המספרים

$\text{ראשוני} \longrightarrow p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ או $p \mid b$

שאלה 5

נתונה קבוצה A של עשרה מספרים דו-ספרתיים שונים.

הוכיחו כי קיימות ל-A שתי תתי-קבוצות זרות ולא ריקות שסכום איבריהן שווה.

שאלה 5

נתונה קבוצה A של עשרה מספרים דו-ספרתיים שונים.

הוכח כי קיימות ל-A שתי תתי-קבוצות זרות ולא ריקות שסכום איבריהן שווה.

פתרון

ישנן $2^{10}-1=1023$ תתי קבוצות שונות שאינן ריקות ל-A.

מצד שני, סכום האיברים בכל תת-קבוצה שכזו הוא בין 10 ל-$990 = 10\cdot 99$

$\Leftarrow$ מעיקרון שובך היונים יש שתי תתי קבוצות שונות של A שסכום איבריהן שווה.

סיימנו?

שאלה 5

נתונה קבוצה A של עשרה מספרים דו-ספרתיים שונים.

הוכיחו כי קיימות ל-A שתי תתי-קבוצות זרות ולא ריקות שסכום איבריהן שווה.

פתרון

ישנן $2^{10}-1=1023$ תתי קבוצות שונות שאינן ריקות ל-A.

מצד שני, סכום האיברים בכל תת-קבוצה שכזו הוא בין 10 ל-$990 = 10\cdot 99$

$\Leftarrow$ מעיקרון שובך היונים יש שתי תתי קבוצות שונות של A שסכום איבריהן שווה.

סיימנו? לא, שכן הקבוצות אינן זרות. מה נעשה?

שאלה 5

נתונה קבוצה A של עשרה מספרים דו-ספרתיים שונים.

הוכיחו כי קיימות ל-A שתי תתי-קבוצות זרות ולא ריקות שסכום איבריהן שווה.

פתרון

ישנן $2^{10}-1=1023$ תתי קבוצות שונות שאינן ריקות ל-A.

מצד שני, סכום האיברים בכל תת-קבוצה שכזו הוא בין 10 ל-$990 = 10 \cdot 99$

$\Leftarrow$ מעיקרון שובך היונים יש שתי תתי קבוצות שונות של A שסכום איבריהן שווה.

סיימנו? לא, שכן הקבוצות אינן זרות. מה נעשה? נכון! נוריד את האיברים המשותפים. הסכומים עדיין יהיו שווים.

שאלה 6

הוכיחו כי בגרף פשוט עם שני צמתים לפחות יש שני צמתים עם אותה הדרגה.

שאלה 6

הוכיחו כי בגרף פשוט עם שני צמתים לפחות יש שני צמתים עם אותה הדרגה.

פתרון

הדרגות האפשריות בגרף פשוט בעל n צמתים הן $\{0,1,2,\dots,n-1\}$.

נראה שזה בדיוק לא מספיק לעיקרון שובך היונים כי מספר הדרגות האפשריות הוא

n = מספר הצמתים בגרף.

שאלה 6

הוכיחו כי בגרף פשוט עם שני צמתים לפחות יש שני צמתים עם אותה הדרגה.

פתרון

הדרגות האפשריות בגרף פשוט בעל n צמתים הן $\{0,1,2,\dots,n-1\}$.

נראה שזה בדיוק לא מספיק לעיקרון שובך היונים כי מספר הדרגות האפשריות הוא n = מספר הצמתים בגרף.

האבחנה החשובה היא שלא ייתכן בגרף בו לצומת אחד דרגה 0 ולאחר דרגה $n-1$!

על כן בגרף נתון מספר הדרגות האפשריות $\leq n-1 < n$ ולכן, מעיקרון שובך היונים יש שני צמתים עם אותה הדרגה.

עיקרון שובך היונים המוכלל

אם m יונים נמצאות ב-n שובכים אז יש שובך המכיל לפחות $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ יונים.

הוכחה

ממוצע היונים (*) בשובך הוא $\frac{m}{n}$. על כן קיים שובך עם לפחות $\frac{m}{n}$ יונים.

מכיוון שיונים הינן יצורים בדידים. קיים שובך עם לפחות $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ יונים.

(*) אף יונה לא נפגעה לצורך הכנת שיעור זה.

גרפי רמזי (Ramsey Graphs)

יהי $K_n=(V,E)$ הגרף השלם על n קודקודים $(E=\{\{u,v\}\mid u,v\in V\})$.

צביעת קשתות K_n בשני צבעים כחול ואדום היא פונקציה $c:E\to\{B,R\}$.

נאמר שהגרף השלם יחד עם הצביעה הוא k-רמזי אם כל תת-גרף בגודל k קודקודים אינו מונוכרומטי, דהיינו, הוא מכיל לפחות קשת אחת מכל צבע.

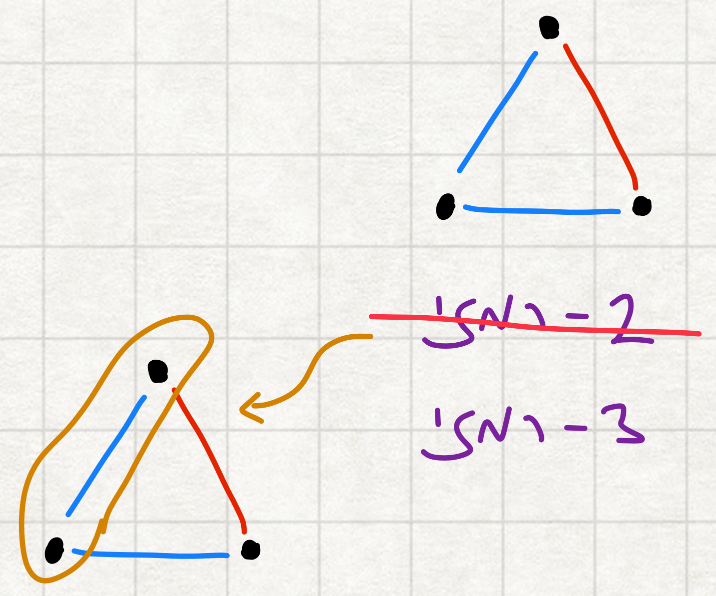
גרפי רמזי (Ramsey Graphs)

יהא $K_n=(V,E)$ הגרף השלם על n קודקודים $(E=\{\{u,v\}\mid u,v\in V\})$.

צביעת קשתות K_n בשני צבעים כחול ואדום היא פונקציה $c:E\to\{B,R\}$.

נאמר שהגרף השלם יחד עם הצביעה הוא k-רמזי אם כל תת-גרף בגודל k קודקודים אינו מונוכרומטי, דהיינו, הוא מכיל לפחות קשת אחת מכל צבע.

דוגמאות



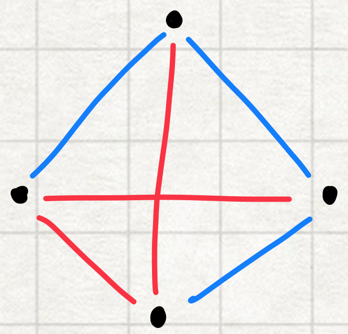
גרפי רמזי (Ramsey Graphs)

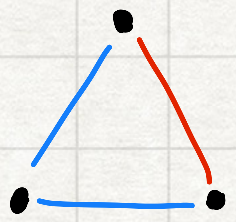
יהא $K_n = (V, E)$ הגרף השלם על n קודקודים $(E = \{\{u,v\} \mid u,v \in V\})$.

צביעת קשתות K_n בשני צבעים כחול ואדום היא פונקציה $c : E \to \{B, R\}$.

נאמר שהגרף השלם יחד עם הצביעה הוא k-רמזי אם כל תת-גרף בגודל
k קודקודים אינו מונוכרומטי, כלומר, הוא מכיל לפחות קשת אחת מכל צבע.

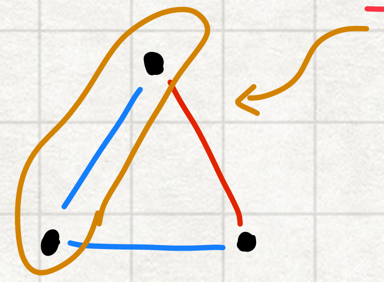
דוגמאות





~~2-רמזי~~

3-רמזי



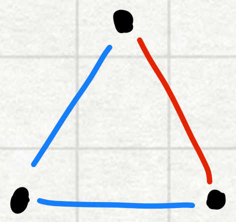
גרפי רמזי (Ramsey Graphs)

יהי $K_n=(V,E)$ הגרף השלם על n קודקודים $(E=\{\{u,v\} \mid u,v\in V\})$.

צביעת קשתות K_n בשני צבעים כחול ואדום היא פונקציה $c: E\to\{B,R\}$.

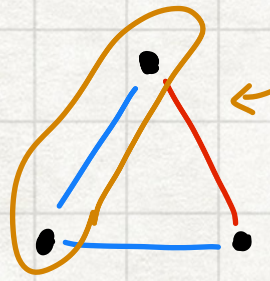
נאמר שהגרף השלם יחד עם הצביעה הוא k-רמזי אם כל תת-גרף בגודל k קודקודים אינו מונוכרומטי, דהיינו, הוא מכיל לפחות קשת אחת מכל צבע.

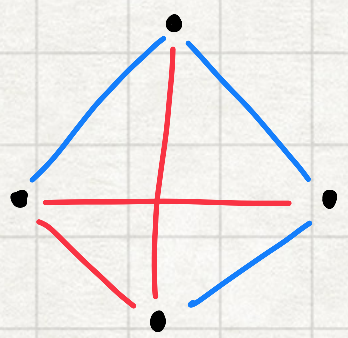
דוגמאות



~~2-רמזי~~

3-רמזי





3-רמזי

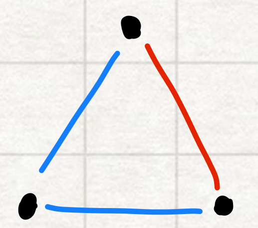
גרפי רמזי (Ramsey Graphs)

יהי $K_n=(V,E)$ הגרף השלם על n צמתים $(E=\{\{u,v\} \mid u,v\in V\})$.

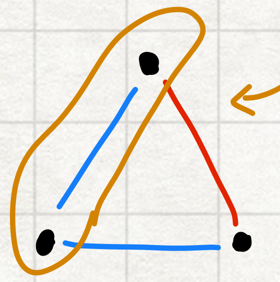
צביעת קשתות K_n בשני צבעים כחול ואדום היא פונקציה $c: E\to\{B,R\}$.

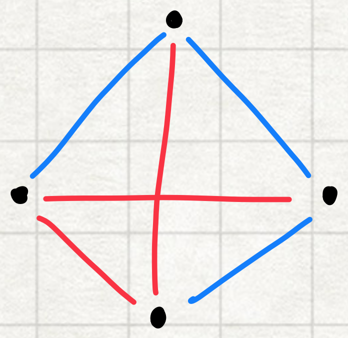
נאמר שהגרף השלם יחד עם הצביעה הוא k-רמזי אם כל תת-גרף בגודל k צמתים אינו מונוכרומטי, כלומר, הוא מכיל לפחות קשת אחת מכל צבע.

דוגמאות

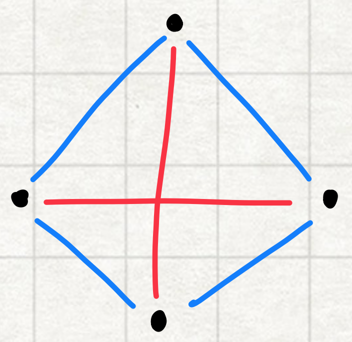


~~2-רמזי~~
3-רמזי





3-רמזי



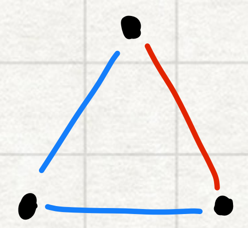
גרפי רמזי (Ramsey Graphs)

יהי $K_n=(V,E)$ הגרף השלם על n קודקודים $\left(E=\{\{u,v\} \mid u,v\in V\}\right)$.

צביעת קשתות K_n בשני צבעים כחול ואדום היא פונקציה $c: E\to\{B,R\}$.

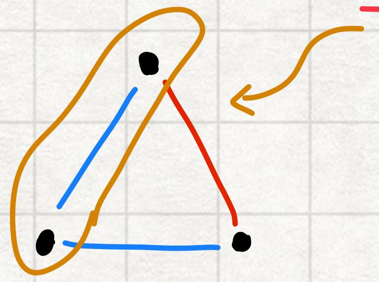
נאמר שהגרף השלם יחד עם הצביעה הוא k-רמזי אם כל תת-גרף בגודל k קודקודים אינו מונוכרומטי, דהיינו, הוא מכיל לפחות קשת אחת מכל צבע.

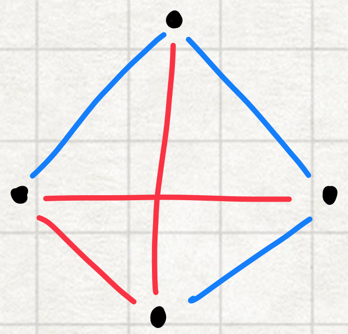
דוגמאות:



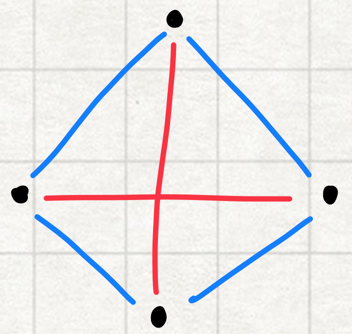
~~2-רמזי~~

3-רמזי





3-רמזי



3-רמזי

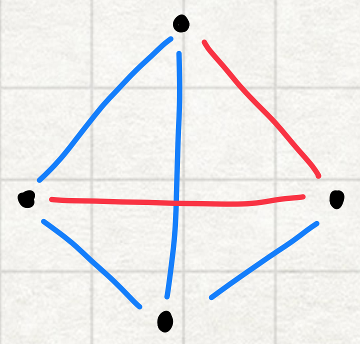
גרפי רמזי (Ramsey Graphs)

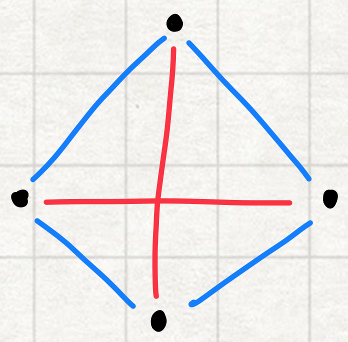
יהי $K_n = (V, E)$ הגרף השלם על n קודקודים $(E = \{\{u,v\} \mid u,v \in V\})$.

צביעת קשתות K_n בשני צבעים כחול ואדום היא פונקציה $c: E \to \{B, R\}$.

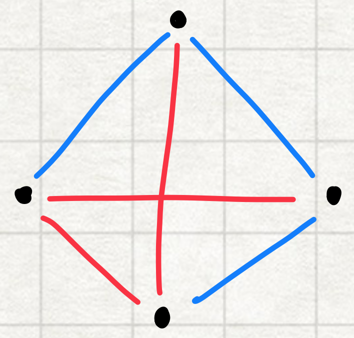
נאמר שהגרף השלם יחד עם הצביעה הוא k-רמזי אם כל תת-גרף בגודל k קודקודים אינו מונוכרומטי, דהיינו, הוא מכיל לפחות קשת אחת מכל צבע.

דוגמאות

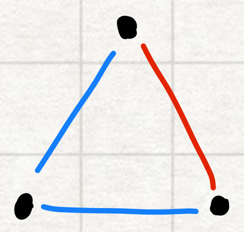




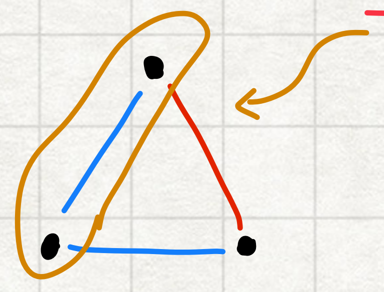
3-רמזי



3-רמזי



~~2-רמזי~~
3-רמזי



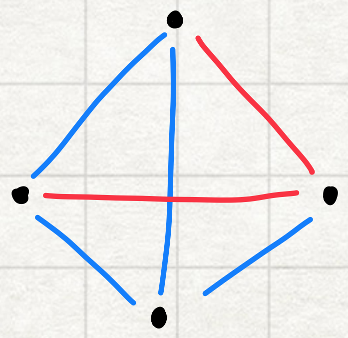
גרפי רמזי (Ramsey Graphs)

יהא $K_n=(V,E)$ הגרף השלם על n קודקודים $(E=\{\{u,v\} \mid u,v\in V\})$.

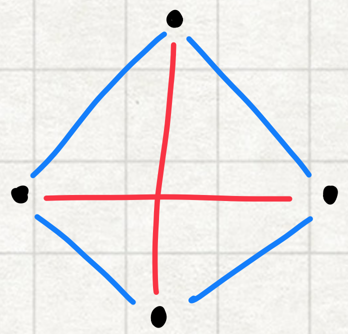
צביעת קשתות K_n בשני צבעים כחול ואדום היא פונקציה $c: E\to \{B,R\}$.

נאמר שהגרף השלם יחד עם הצביעה הוא k-רמזי אם כל תת-גרף בגודל k קודקודים אינו מונוכרומטי, דהיינו, הוא מכיל לפחות קשת אחת מכל צבע.

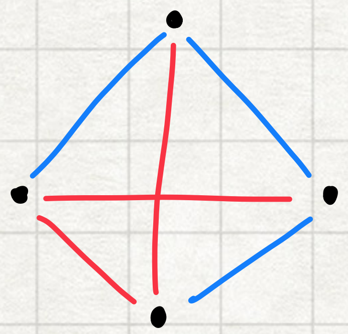
דוגמאות



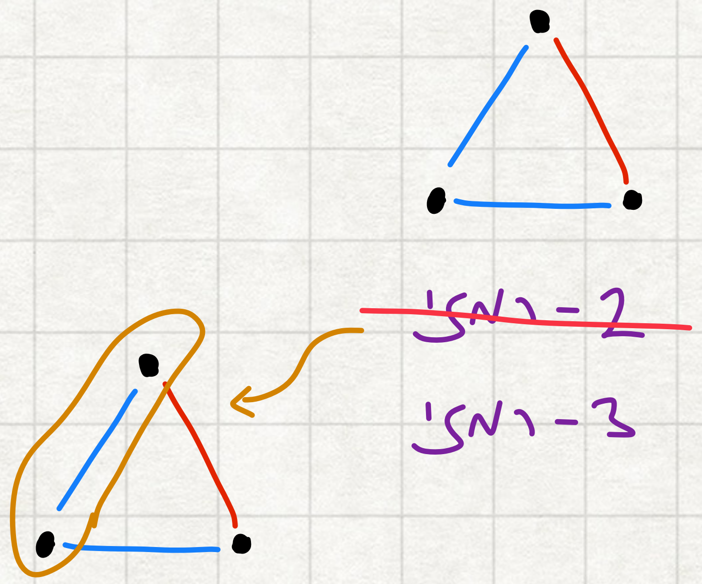
4-רמזי



3-רמזי



3-רמזי



~~2-רמזי~~

3-רמזי

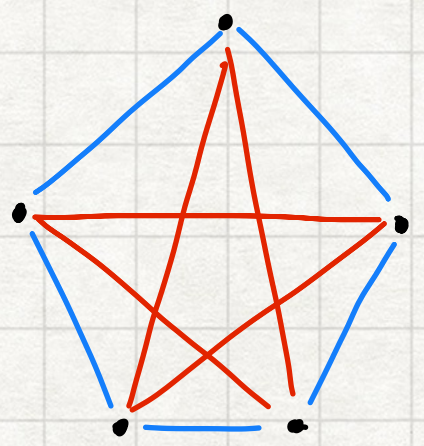
גרפי רמזי (Ramsey Graphs)

יהי $K_n = (V, E)$ הגרף השלם על n קודקודים $(E = \{\{u,v\} \mid u,v \in V\})$.

צביעת קשתות K_n בשני צבעים כחול ואדום היא פונקציה $c : E \to \{B, R\}$.

נאמר שהגרף השלם יחד עם הצביעה הוא k-רמזי אם כל תת-גרף בגודל k קודקודים אינו מונוכרומטי, דהיינו, הוא מכיל לפחות קשת אחת מכל צבע.

דוגמא:



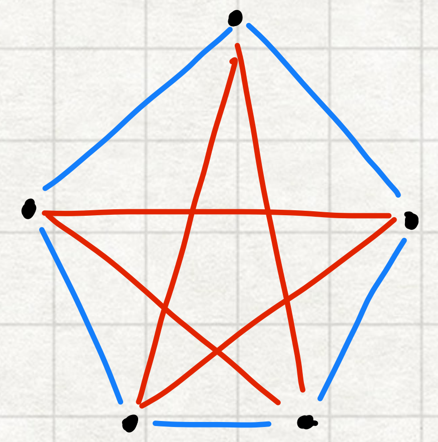
גרפי רמזי (Ramsey Graphs)

יהא $K_n=(V,E)$ הגרף השלם על n קודקודים $(E=\{\{u,v\} \mid u,v\in V\})$.

צביעת קשתות K_n בשני צבעים כחול ואדום היא פונקציה $c: E\to\{B,R\}$.

נאמר שהגרף השלם יחד עם הצביעה הוא k-רמזי אם כל תת-גרף בגודל k קודקודים אינו מונוכרומטי, דהיינו, הוא מכיל לפחות קשת אחת מכל צבע.

דוגמא:



3-רמזי

גרפי רמזי (Ramsey Graphs)

יהא $K_n = (V, E)$ הגרף השלם על n צמתים $\left(E = \{\{u,v\} \mid u,v \in V\}\right)$.

צביעת קשתות K_n בשני צבעים כחול ואדום היא פונקציה $c : E \to \{B, R\}$.

נאמר שהגרף השלם יחד עם הצביעה הוא k-רמזי אם כל תת-גרף בגודל k צמתים אינו מונוכרומטי, דהיינו, הוא מכיל לפחות קשת אחת מכל צבע.

שאלה 7

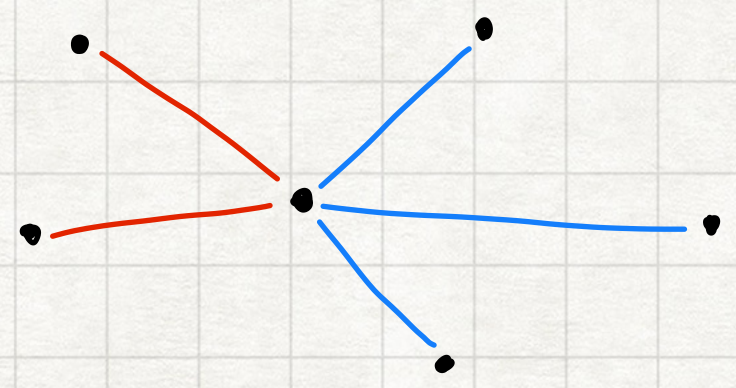
הוכיחו כי לא קיים גרף 3-רמזי על 6 צמתים.

שאלה 7

הוכח כי לא קיים גרף 4 3-רמזי על 6 צמתים.

פתרון

נתבונן בצומת כלשהו



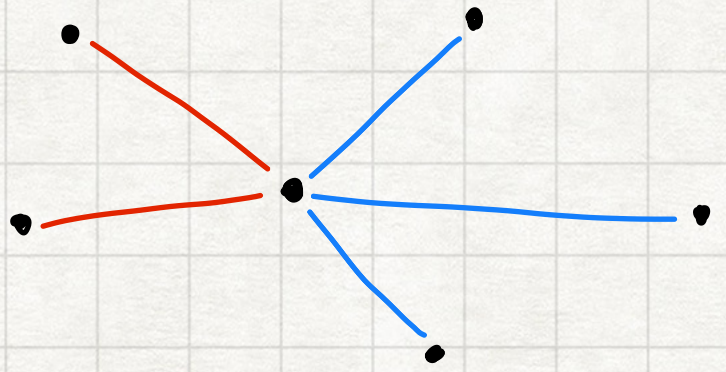
יש לצומת חמישה שכנים, ולכן מעיקרון שובך היונים המוכלל, לפחות שלושה שכנים מחוברים אליו בקשתות עם אותו הצבע.

שאלה 7

הוכח כי לא קיים גרף 3-רמזי על 6 צמתים.

פתרון

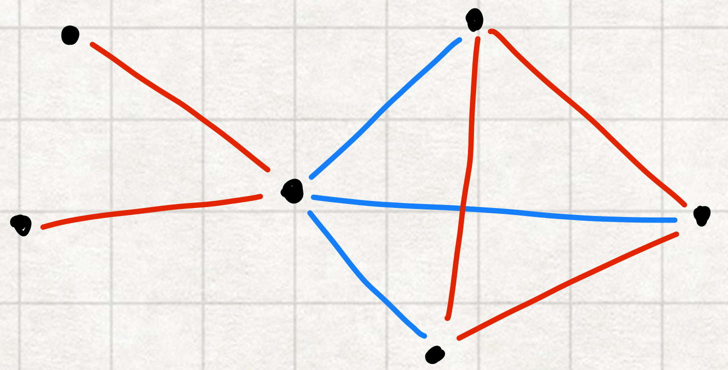
נתבונן בצומת כלשהו



יש לצומת חמישה שכנים, ולכן מעיקרון שובך היונים המוכלל, לפחות שלושה שכנים מחוברים אליו בקשתות עם אותו הצבע.

נפרד למקרים.

מקרה א: אם שלושת השכנים מחוברים האחד לשני בקשתות עם אותו הצבע אז מצאנו "משולש" מונוכרומטי ולכן הגרף אינו 3-רמזי.

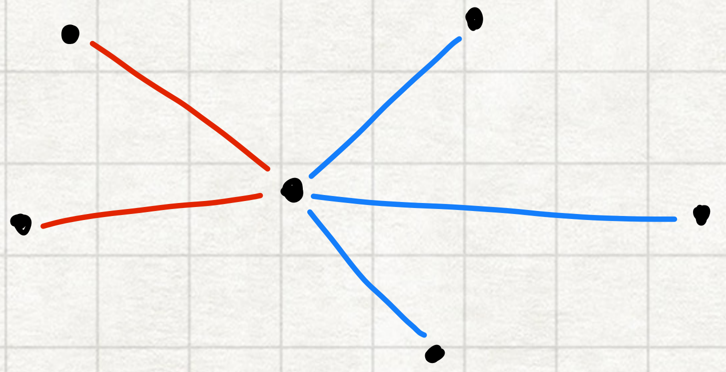


שאלה 7

הוכח כי לא קיים גרף 3-רמזי על 6 צמתים.

פתרון

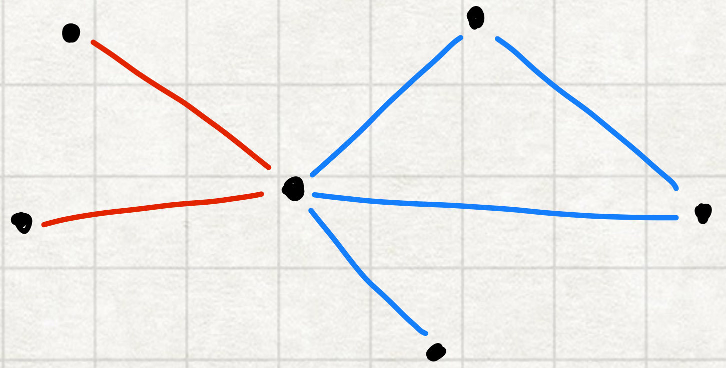
נתבונן בצומת כלשהו



יש לצומת חמישה שכנים, ולכן מעיקרון שובך היונים המוכלל, לפחות שלושה שכנים מחוברים אליו בקשתות עם אותו הצבע.

נפריד למקרים.

מקרה ב׳: אם מקרה א׳ אינו מתקיים אז שניים מבין "שכניו הכחולים" של הצומת מחוברים בקשת כחולה, ולכן יחד עם הצומת הם סוגרים משולש כחול.



שאלה 8

שישה אנשים נוכחו במסיבה. תחת ההנחה שהכרות היא יחס סימטרי,
הוכיחו כי במסיבה נוכחים שלושה אנשים שכולם מכירים זה את זה
או שלושה מהנוכחים לא מכירים זה את זה.