

ע' קריון שובק

פיונים

ע'כ א'כ

עיקרון שוקק היינץ

אם A הוא $(n+1) \times n$ מטריצה של מספרים ממשיים אז יהיה שוקק עם לפחות 2 יינץ.

הוכחה

ז"ל.

ניסוח יוצר פורמלי

אם $f: [n+1] \rightarrow [n]$ אז f היא חז"ל.

שאלה 1

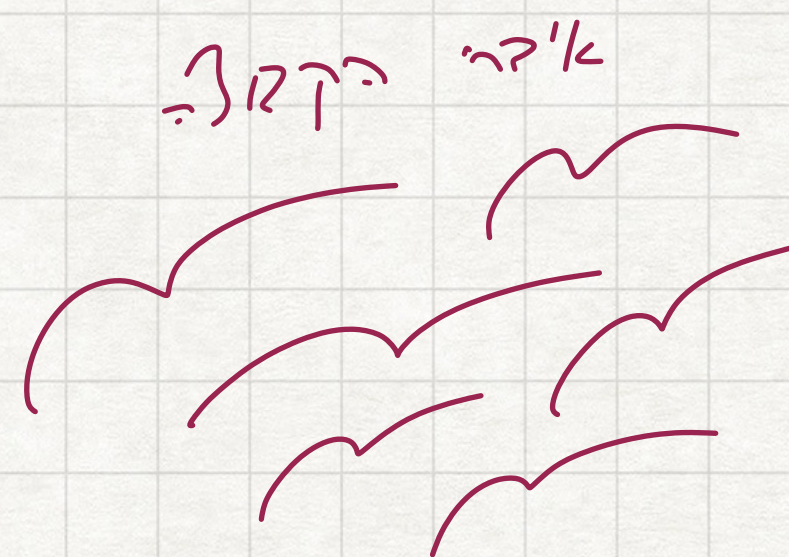
הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים n מספרים a_1, a_2, \dots, a_n כך ש-

$a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2$

שאלה 1

הוכיחו כי בכל תת קבוצה של $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ נמצאת 6, י"ש של

איברים לסכומם 9.



ביטוי

נסתכל על חמש הקבוצות הקטנות

- $\{0, 9\}$, $\{1, 8\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$
 שוקן 1 שוקן 2 ... שוקן 5

מעיקרון שוקן היינץ, כל תת קבוצה נמצאת 6 נבחרת את כל איברי אחר
 מהקבוצות הנ"ל.

לפי 2

תהא $A \subseteq [2n]$, $|A| \geq n+1$. הוכיחו כי קיימים n מספרים A -?

כך שהאחד מתחלק (ללא שארית) דאחר.

שאלה 2

תהא $A \subseteq [2n]$, $|A| \geq n+1$. הוכיחו כי קיימים n מספרים x_1, \dots, x_n ש- A מכילם.
בק שהאחד מתחתך (ללא שאלות) דאמר.

פתרון

נסמן את אברי A - $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$, ונכתוב

$$x_i = 2^{k_i} \cdot b_i$$

כאשר $k_i \geq 0$ ו- b_i אי-זוגי.

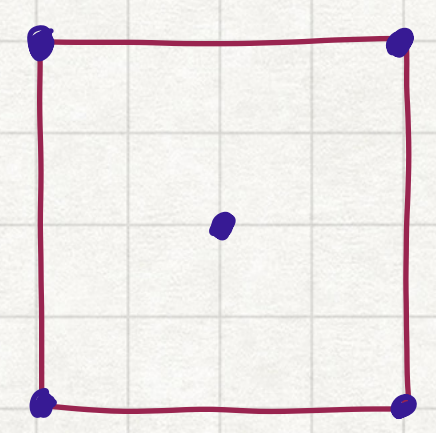
מכיון שיש n מספרים אי-זוגיים ב- $[2n]$ ומכיון ש- $b_1, \dots, b_{n+1} \in [2n]$ ו-

יש $n+1$ מספרים, נעזר על העקרון של דירכלט כדי להוכיח כי יש $i < j$ כזה ש-

$$x_i = 2^{k_i} b_i = 2^{k_i} b_j \mid 2^{k_j} b_j = x_j \quad \Leftarrow$$

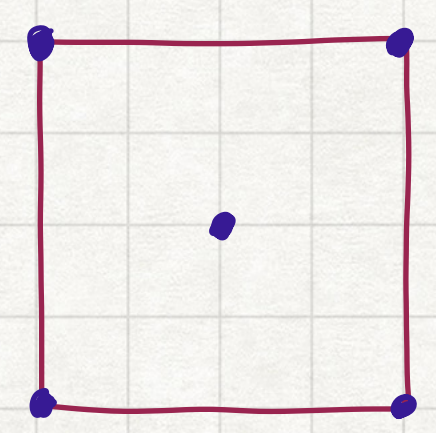
שאלה 3

קטק היקוף שאורק בלע 2 נתנו 5 נקודו - שוני
הובאו כי קיימו 2 נקודו - שוני שהמרחק ביניהן
אין עולה על $\sqrt{2}$



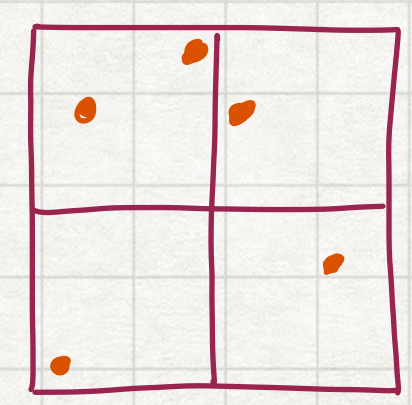
שאלה 3

קטק היקוצ לאורק בלע 2 נתנו 5 נקודו - שוני.
הובאו כי קיימו 2 נקודו - שוני - שהמרחק ביניהן
אינו עולה על $\sqrt{2}$.



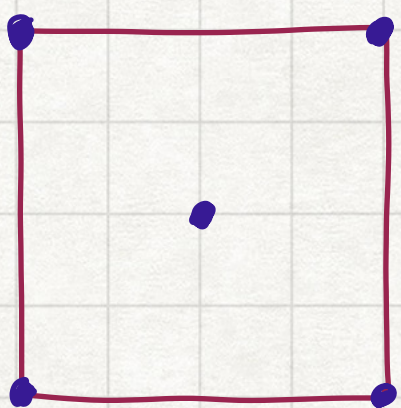
פתרון

נחלק את היקוצ כמו באיור. מע'קיון שוקן היילים
שם נק' למחר נמצאו - באות היקוצ ו-1 ואכן
המרחק בין שתי נק' אלו $\geq \sqrt{2}$.



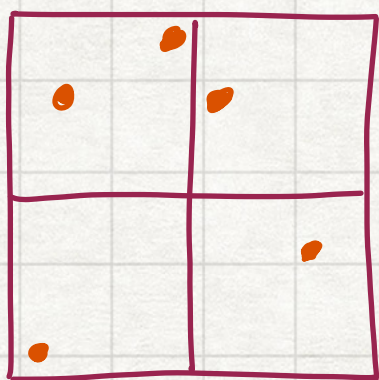
שאלה 3

קטק היקוצ לאורק בלע 2 נתנו 5 נקודו - שוני.
הוכחו כי קיימו 2 נקודו - שוני - שהמרחק ביניהן
אין עולה על $\sqrt{2}$.



פתרון

נחלק את היקוצ כמו באיור. מע'קיון שוקן היילים
שם נק' למחר נמצאו - באות היקוצ ו-1 ואכן
המרחק בין שתי נק' אלו $\geq \sqrt{2}$.



שאלה 4

הוכיחו כי קיים מספר n כך שלכל ספרוויטו n שמתחלק $n-1$.

פתרון לא מומלץ

לדוגמה ולקבוע, אכן נעשה כאן תיאווכו דק שהמספר

הוא n מהצורה הזו המתחלק $n-1$ הוא $777,777 = 13 \cdot 59,829$

שאלה 4

הוכיחו כי קיים מספר n כך שלכל ספרוויטו n שמתחלק $n-13$.

פתרון לא מומלץ אחר

ישנן מבחן לרמורק $n-13$: מספר מתחלק $n-13$ אם n לארמורסיטיק

למספר n ספר n האזנה של n ספר האזנה $n-4$, מקדל

מספר שמתחלק $n-13$.

$$777 \rightarrow 77 + 7 \cdot 4 = 105 \rightarrow 10 + 5 \cdot 4 = 30$$

$$7777 \rightarrow 777 + 7 \cdot 4 = 805 \rightarrow 80 + 5 \cdot 4 = 100 \rightarrow 10 + 0 \cdot 4 = 10$$

בשני הפתרונות הללו n יוצר $n-13$ - ניסיון למצוא מספר n כנגדו n לארמורסיטיק $n-13$.

שאלה 4

הוכיחו כי קיים מספר טבעי שכל ספרותיו הן 7 שמתחלק ב-13.

פתרון

נסתכל על 13 המספרים $7, 77, 777, \dots, \underbrace{77\dots7}_{13 \text{ ספרות}}$

אם אחד מהם מתחלק ב-13 - סיימנו!

אחרת 13 המספרים לעיל משאירים שאריות מקבוצת $\{1, 2, \dots, 12\}$ חתומה ב-13.

לעזרתנו שוקק היננו, שנים מתוכם משאירים את אותה שארית ולכן

הפרש מתחלק ב-13.

$$13 \mid \underbrace{77\dots7}_a - \underbrace{77\dots7}_b = \underbrace{777\dots7}_{a-b} \underbrace{00\dots0}_b$$

שאלה 4

הוכיחו כי קיים מספר זוגי של ספרות 7 שמתחלק ל-13.

פתרון

$$13 \mid \underbrace{77\dots7}_a - \underbrace{77\dots7}_b = \underbrace{777\dots7}_{a-b} \underbrace{00\dots0}_b$$

מכיון ש-13 הוא ראשוני שאינו מתחלק ב- 10^b מתקיים $13 \mid \underbrace{7\dots7}_{a-b}$

מכאן - נניח $13 \mid ab$

ראשון $\rightarrow p \mid ab \Rightarrow p \mid a \text{ או } p \mid b$

שאלה 5

נתונה קבוצה A של צורה מספרים 13-ספרתיים שונים.

הוכחו כי קיימת A -פונקציה קבוצה-צורה ולא ריקה לסכום איזרובן שלה.

שאלה 5

נתונה קבוצה A של עשרה מספרים 13-ספרתיים שונים.

הוכחו כי קיימת A -סובת של תת-קבוצה צמודה ולא ריקה של סובת איזרובן שלה.

פתרון

ישנן $2^{10} - 1 = 1023$ תת-קבוצות שונות שאינן ריקות A .

מזה שני, סובת האיזרובן בכל תת-קבוצה של 10 היא קבוצה של 10 מספרים 10 -ספרתיים.



\Leftrightarrow מעדיקרון לובק היותם יש של תת-קבוצה שונה A של סובת איזרובן שלה.

סיימת?

שאלה 5

נתונה קבוצה A של עשרה מספרים 13-ספרתיים שונים.

הוכחו כי קיימת A -תת קבוצה צמודה ולא ריקה של מספר איזרובין שלה.

פתרון

ישנן $2^{10} - 1 = 1023$ תת קבוצות שונות שאינן ריקות A .

מזה שני, מספר האיזורים בכל תת קבוצה שווה הוא בין 10 ל- $990 = 10 \cdot 99$



\Leftrightarrow מעדיקרון לובק היותם יש להם תת קבוצות שונות A של מספר איזרובין שלה.

סיימן? לא, לפי הקבוצות אינן צמודות. מה נעשה?

שאלה 5

נתונה קבוצה A של n מספרים טבעיים. n מספרים שונים.

הוכיחו כי קיימת A של n מספרים שונים ואלו הן מספרים איזורים שלה.

פתרון

ישנן $2^n - 1 = 1023$ תתי-קבוצות שונות של A .

מזה שני, מספר האיזורים בכל תתי-קבוצה של A הוא בין 10 ל- $990 = 10 \cdot 99$.



\Leftrightarrow מעדיקרון לובק היותם יש n מספרים שונים A מספר איזורים שלה.

סיימת? לא, שכן הקבוצות אינן זרות. מה נעשה? נכון! נצטרך את האיזורים המשוערים. הסכימתם עדיין 'היו' שווים.

שאלה 6

הזכירו כי קצת פסוקים הם שני בתיים לפחות יש שני בתיים עם אותה היצירה.

שאלה 6

הוכיח כי קבוצת פסוקים שני בלתי נפרדת יש שני בלתי נפרדת עם אותה הדרגה.

פתרון

הדרגה — האפשריות קבוצת פסוקים n בלתי נפרדת הן $\{1, 2, \dots, n-1, n\}$.

נראה שכל קבוצת פסוקים לא מסתכנת לעצמה שוקק היוונים כי מספר הדרגה — האפשריות הוא

$n =$ מספר הבלתי נפרדת קבוצה.

שאלה 6

הוכיח כי קבוצת פסוקים שני בלתי נפרדת יש שני בלתי נפרדת עם אותה הדרגה.

פתרון

הדרגה — האפשריות קבוצת פסוקים n בלתי נפרדת $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

נראה שיש קבוצה לא מסתכנת לעצמה שוקק היונים כי מספר הדרגה — האפשריות הוא

$$n = \text{מספר הבלתי נפרדות קבוצה.}$$

האמת החשובה היא שלא ייתכן שיהיו בלתי נפרדות אחת נפרדת 0 ולאחר נפרדת $n-1$!

עם כן קבוצת נפרדות מספר הדרגה — האפשריות $\geq n-1 > n$ ולכן — מעצמותן שוקק היונים

יש שני בלתי נפרדת עם אותה הדרגה.

צ'קוין שוק היונים המוביל

אם M יונים נבחרו \rightarrow n שוקים אז י שוק
הכיל מסתו $\lfloor \frac{M}{n} \rfloor$ יונים.

הוכחה

ממילך היונים (*) שוק הוא $\frac{M}{n}$.
אם כן קיים שוק עם מסתו $\frac{M}{n}$ יונים.
לכיון שיוני היום יבויים בז'ז'ים. קיים שוק עם מסתו $\lfloor \frac{M}{n} \rfloor$ יונים.

(*) אם יוני לא נסגרו אז שוק שיה.

גרפים ראמי (Ramsey Graphs)

היה $K_n = (V, E)$ גרף שלם n צבעים $c: E \rightarrow \{B, R\}$ (כאן B בירוק ו- R אדום)

היה $c: E \rightarrow \{B, R\}$ פונקציה. האם יש גרפים שלמים K_n שבהם יש צבעים k וחסר צבעים k ?

אם $k=2$ זה אומר שיש גרף שלם K_n שבו יש צבעים 2 וחסר צבעים 2.

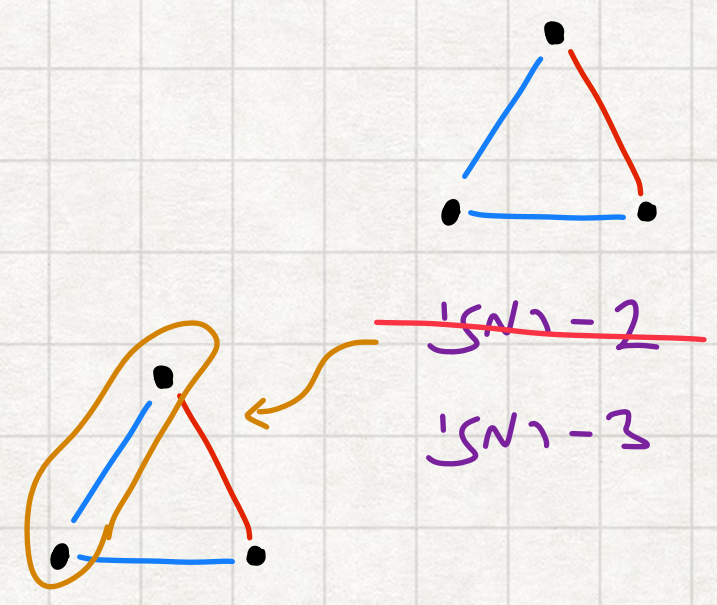
$k=2$ זה אומר שיש גרף שלם K_n שבו יש צבעים 2 וחסר צבעים 2. (האם יש גרפים שלמים K_n שבהם יש צבעים k וחסר צבעים k ?)

גרפים ראמי (Ramsey Graphs)

היה $K_n = (V, E)$ גרף מלא עם n קודים ו- $E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$.
 קיימת פונקציה $c: E \rightarrow \{B, R\}$ המצביעה על צבע קשתות (כחול או אדום).

אנחנו רוצים לדעת האם יש קבוצה של k קודים שבה כל הקשתות צבועות באותו צבע (כליל או כחול).
 קיימת תוצאה המכונה "למטה" או "עליון" המגדלת את גודל הקבוצה הזו.

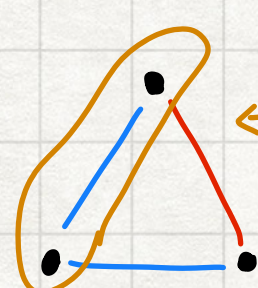
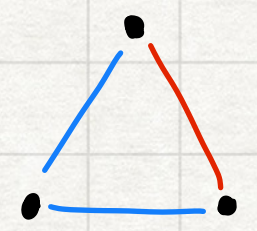
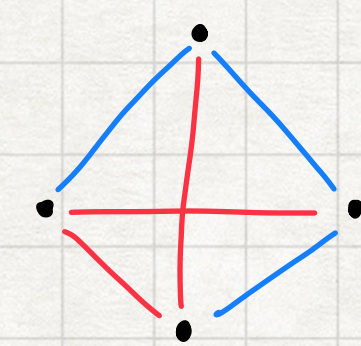
→ $R(n, 2)$



גרפים ראמי (Ramsey Graphs)

היה $K_n = (V, E)$ גרף מלא עם n קודים ו- $E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ קודים.
 קיים פונקציה $c: E \rightarrow \{B, R\}$ שנקראת **צביעה** (coloring) על קודים K_n כך שיש קודים K_2 כחולים או K_2 אדומים.

הקודים K_2 הם קודים k -צבעיים. האם יש קודים K_2 כחולים או K_2 אדומים?
 k צבעים, כל קודים k -צבעיים, האם יש קודים k -צבעיים?



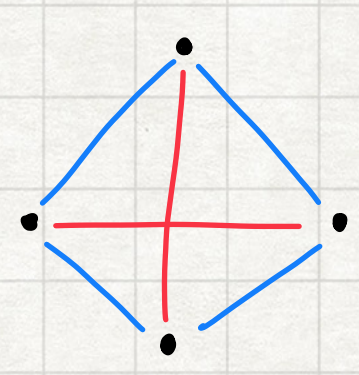
~~$|V| - 2$~~
 $|V| - 3$

→ $|V| - 2$

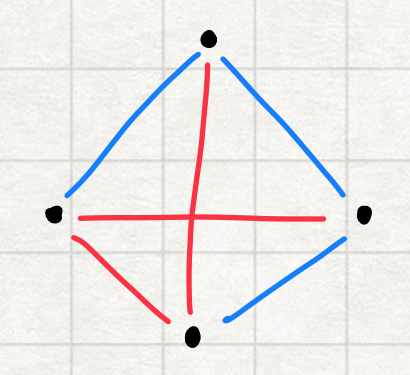
גרפים ראמי (Ramsey Graphs)

היה $K_n = (V, E)$ גרף המלא n נקודות
 $(E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\})$
 קיימת פונקציה $c: E \rightarrow \{B, R\}$ כזו שכל קבוצת k נקודות
 מכילה או קבוצת k קטעים אדומים או קבוצת k קטעים כחולים

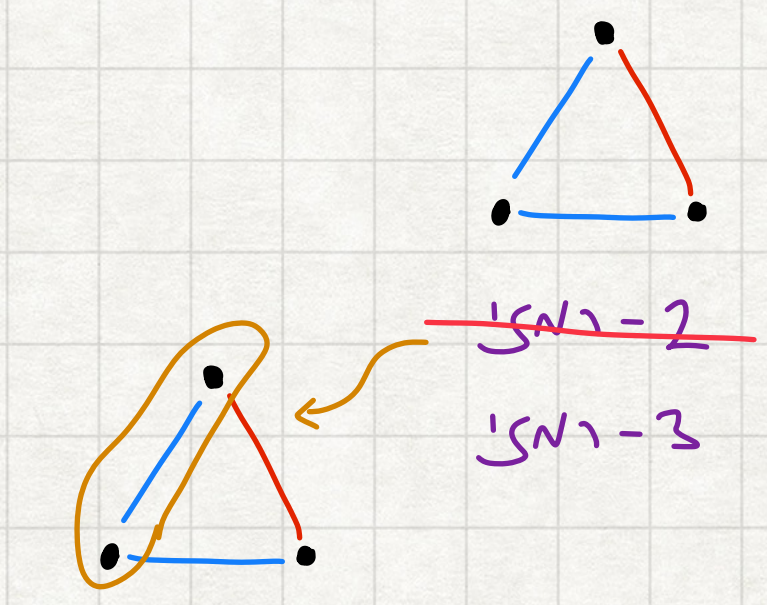
הקטע K_2 הוא קטע אחד או קטע אחד
 כל קבוצת k נקודות מכילה או קבוצת k קטעים אדומים או קבוצת k קטעים כחולים



$R(3,3)=6$



$R(3,3)=6$



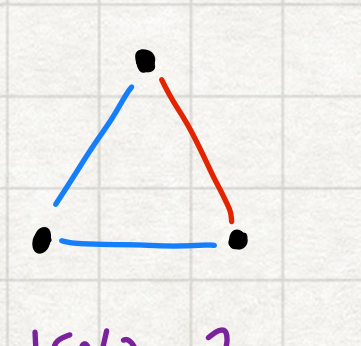
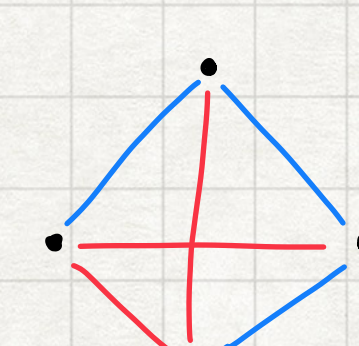
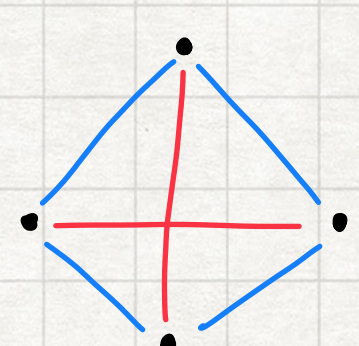
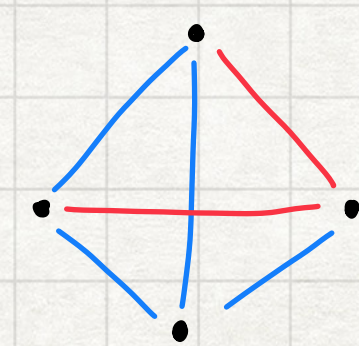
$R(3,2)=3$

~~$R(3,2)=2$~~
 $R(3,2)=3$

גרפים ראמי (Ramsey Graphs)

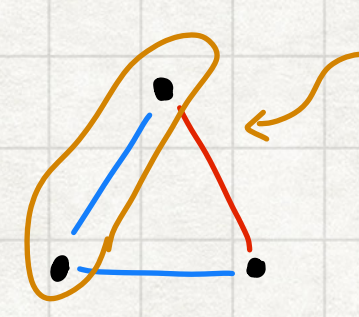
היה $K_n = (V, E)$ גרף המלא n נקודות
 $(E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\})$
 פונקציה $c: E \rightarrow \{B, R\}$ היא פונקציה **כחולה** או **אדומה** על K_n \rightarrow n קצוות \rightarrow n צבעים

אם K_n הוא גרף ראמי k -צבעי אז יש בו k צבעים
 כל צבע k נקודות או יותר. כל צבע k נקודות או יותר.
 כל צבע k נקודות או יותר. כל צבע k נקודות או יותר.



$R(3,3) = 6$

$R(3,3) = 6$



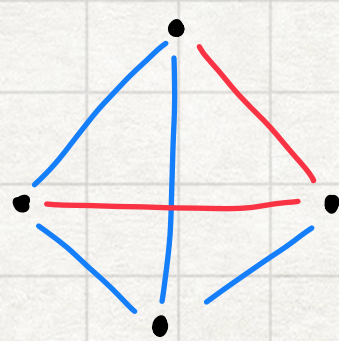
~~$R(3,3) = 2$~~
 $R(3,3) = 3$

\rightarrow $R(3,3) = 6$

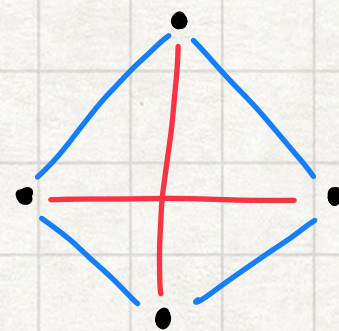
גרפים ראמי (Ramsey Graphs)

היה $K_n = (V, E)$ גרף המלא n נקודות. $E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$.
 קיימת פונקציה $c: E \rightarrow \{B, R\}$ המצביעה על צבע קשתות (כחול או אדום).

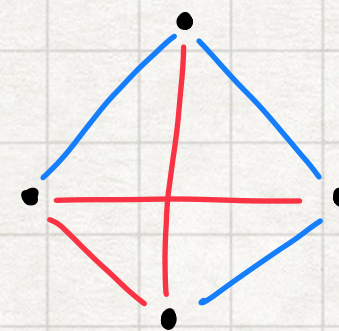
אנחנו מחפשים גרפים המלאים K_n שבהם אין קשתות בצבע אחד או שני.
 כלומר, גרפים המלאים K_n שבהם אין קשתות בצבע אחד או שני.



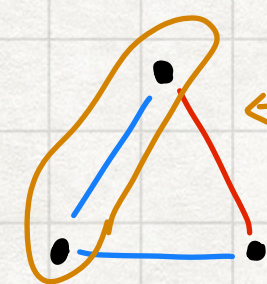
$R(4, 2) = 4$



$R(4, 3) = 3$



$R(3, 3) = 3$



~~$R(3, 2) = 2$~~
 $R(2, 3) = 3$

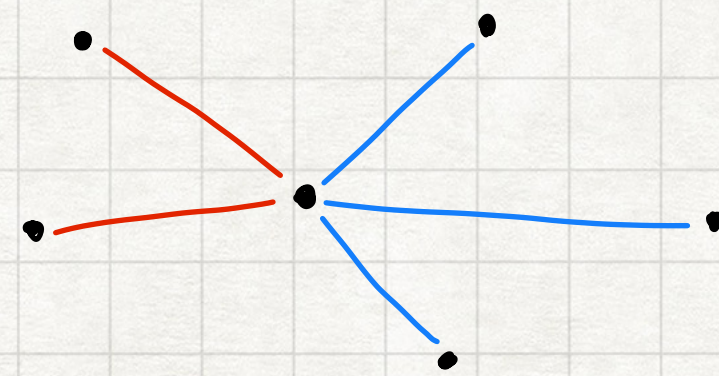
→ $R(2, 2) = 2$

שאלה 7

הוכיח כי לא קיים גרף 3-רמצי עם 6 צמתים.

פתרון

נתבונן בצורה כזו



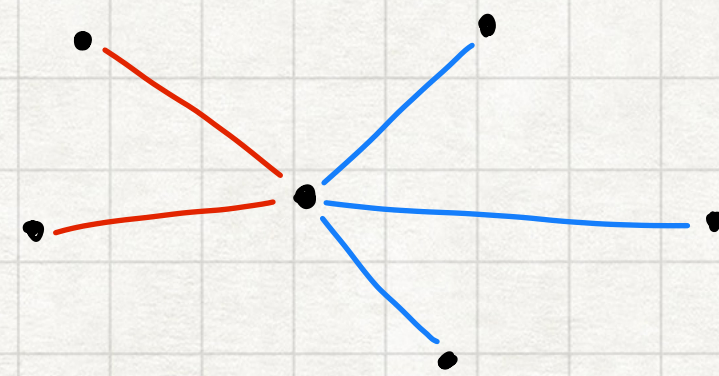
יש לבדוק חמישה שנים, ולכן נציקרון שרק היונים המוביל, לפחות שלוש שנים
מחברים אתו בקשר עם אלו הלבד.

שאלה 7

הוכח כי לא קיים גרף 3-רמשי עם 6 צמתים.

פתרון

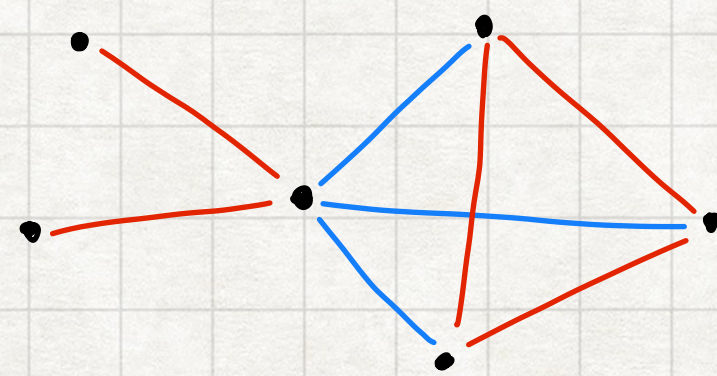
נתיבון בצורה כזו



יש לבדוק חלופות שונות, ולכן נציקחון שוקי היונים המוביל, לפחות שולש שנים
 מחברים אלו בקשר עם אלו הבלע.

נפרז למקרים.

מקרה א': אם שולש השנים מחברים האחד לפני בקשר עם אלו הבלע
 אז נצאן 'משנה' מוכוונת וכן הנה אנו 3-רמשי.

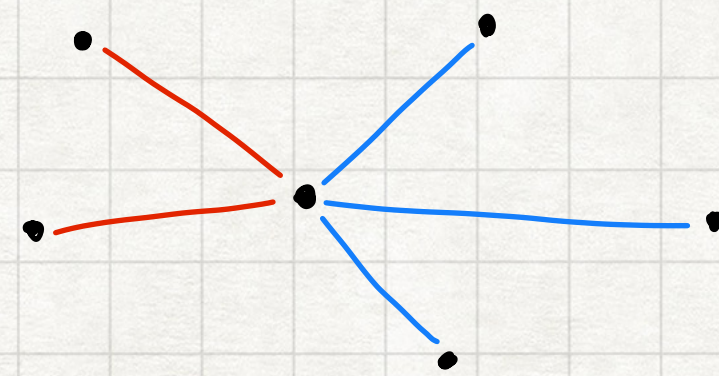


שאלה 7

הוכח כי לא קיים גרף 3-רמזי עם 6 צמתים.

פתרון

נתיבון בצורה כזו



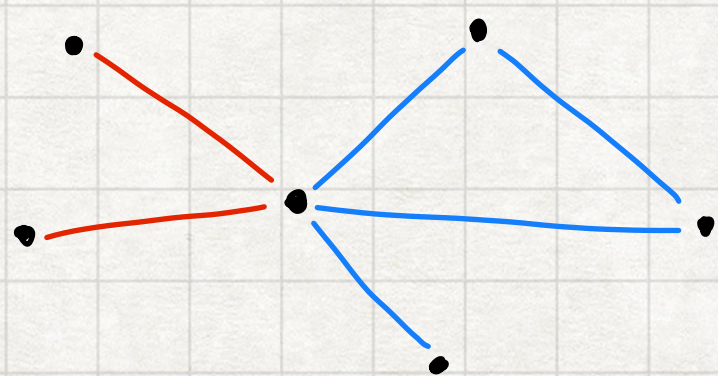
יש לבדוק חמישה שגיאות, ולכן נציקחון שרק היונים המובלג, לפחות שווה שנים
מאקרים אלו בקשר עם אלו הבלעז.

נפרז למקרים.

מקרה ד': אם מקרה א' אינו מתקיים אזי שנים מבין "שניו הכחולים" של הבלעז

מאקרים בקשר כחולה, ולכן יחז עם הבלעז הם סוקרים

משום כחול.



על פי 8

ישלח אנשים נוספים קמפיקה. מהם הנחה להכרחי היא יחס סימטרי,

הוכיחו כי קמפיקה נוספים שלוש אנשים שלבם מכירים ≥ 5 א ≥ 5

א שלוש מהנוכחים לא מכירים ≥ 5 א ≥ 5 .