

מתמטיקה בדידה 2 - מבחן מסכם מועד א

תאריך: 20/2/2025

סגל הקורס: פרופסור גיל כהן, יואב גל-צור, איתי כהן.

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- ניתן להיעזר בדף נוסחאות אחד (כתוב משני צדדיו). השימוש במחשבון אסור.
- את התשובות יש לרשום רק על טופס הבחינה. מתברת הבחינה משמשת כטיוטה ולא תיבדק.
- יש לרשום מספר ת.ז. ומספר מחברת בראש כל אחד מהדפים בטופס.
- המבחן מורכב מ-6 שאלות. יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות, לבחירתכם, ולכתוב "לא לבדיקה" כתשובה לשאלה שבחרתם שלא לענות עליה. שווי כל שאלה 20 נקודות. במידה ועניתם על כל 6 השאלות, יבדקו 5 שאלות כלשהן (לאו דווקא הראשונות או אלו עם הניקוד הגבוה ביותר), אזי בבקשה המנעו מלעשות כך.
- אלא אם כן נכתב אחרת, יש לתת נימוק קצר לתשובתכם עבור כל שאלה במסגרת המתאימה. במקרים בהם אתם מתבקשים לכתוב הוכחה, יש לכתוב הוכחה מלאה ופורמלית.
- יש לכתוב את כל התשובות במקום המוקצב ובכתב קריא. תשובות ובהן חריגות לא זניחות מהמקום המוקצב, או תשובות הכתובות בכתב קטן באופן קיצוני או לא ברור לא ייקראו ולא יקבלו ניקוד, או שיקבלו ניקוד חלקי בלבד. תשובות שדורשות מאמצים רבים להבנתן גם כן עלולות לגרור הורדת ציון.
- לכן, מומלץ בחום לפתור ראשית במחברת ואז לרשום פתרון מסודר במסגרת. כאמור, ישנן זוג מסגרות נוספות למקרה הצורך בסוף הטופס.
- ניתן לרשום "אינני יודע/ת" כתשובה לשאלה או סעיף שלה ולקבל 20% מהניקוד. במקרה זה אין להוסיף שום הסבר.

**בהצלחה!**

**שאלה 1 (20 נקודות)** יש לענות על שני הסעיפים הבאים. אין קשר בין הסעיפים.

א. (10 נקודות) יהיו  $0 < k \leq n$  מספרים טבעיים. כמה זוגות סדורים של קבוצות  $A, B \subseteq [n]$  ישנם כך שגודל הקבוצות  $|A| = |B| = k$  ומתקיים

$$|A \cap B| = \frac{|A \cup B|}{2}$$

ב. (10 נקודות) יהא  $T = (V, E)$  עץ על  $n$  צמתים. עבור  $v \in V$  נסמן ב- $d_v$  את הדרגה של הצומת  $v$  ב- $T$ . נמקו בקצרה מדוע מספר הדרכים להוסיף קשת ל- $T$  כך שהגרף המתקבל יכיל משולש הוא

$$1 - n + \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d_v^2$$

**שאלה 2 (20 נקודות)**

א. (10 נקודות) הוכיחו כי לכל  $n \geq 2$  קבוצות  $A_1, \dots, A_n$  מתקיים

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| \geq \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n |A_i \cap A_j|$$



ב. (10 נקודות) מצאו תנאי הכרחי ומספיק על הקבוצות  $A_1, \dots, A_n$  כך שיתקיים שוויון בסעיף א.

**שאלה 3 (20 נקודות)** יהא  $n$  מספר טבעי. קבוצה  $A \subseteq [n]$  תקרא "מינימאלית" אם מתקיים  $|A| = \min A$ .  
א. (5 נקודות) יהא  $k \in [n]$ . כמה קבוצות מינימאליות  $A \subseteq [n]$  ישנן מגודל  $k$ ?

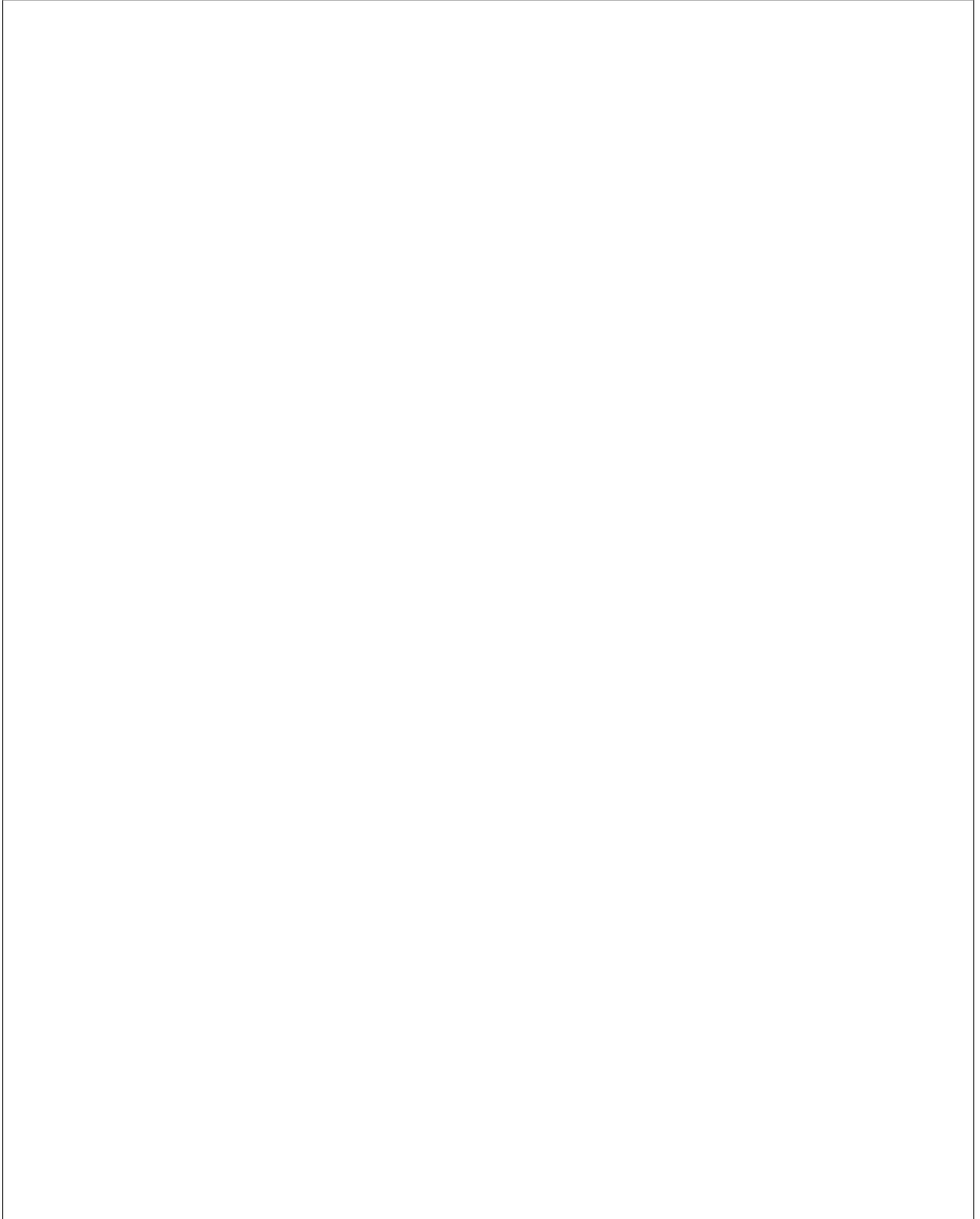
ב. (5 נקודות) כמה קבוצות מינימאליות ישנן עבור  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ? אין צורך בנימוק.

ג. (10 נקודות) כמה קבוצות מינימאליות  $A \subseteq [n]$  ישנן? תשובה עם סכימה תזכה בניקוד חלקי.

**שאלה 4 (20 נקודות)** בשאלה זו נגדיר וריאציה על מספרי ראמזי שראינו בכיתה. עבור מספרים טבעיים  $s, t \geq 2$  נסמן ב-  $\tilde{R}(s, t)$  את המספר הטבעי הקטן ביותר המקיים שכל צביעה של קשתות הגרף השלם על מספר זה של צמתים בהכרח תשרה לפחות **שני גרפים** שלמים על  $s$  צמתים שכל הקשתות המחברות ביניהם כחולות או **שני גרפים** שלמים על  $t$  צמתים שכל הקשתות המחברות ביניהם אדומות, או **לפחות גרף אחד מכל סוג**. נציין כי מותר לגרפים הללו לחלוק צמתים וקשתות.

א. (10 נקודות) חשבו את  $\tilde{R}(2, t)$  עבור  $t \geq 2$ .

ב. (10 נקודות) הוכיחו כי לכל  $s, t \geq 2$  מתקיים  $\tilde{R}(s, t) \leq R(s, t) + 1$ .





**שאלה 5 (20 נקודות)**

א. (5 נקודות) חשבו בעזרת שיקולים קומבינטוריים בסיסיים (עיקרון החיבור, עיקרון הכפל וכדומה) את מספר העצים הפורשים של הגרף המתקבל על ידי הסרת קשת אחת מהקליק על 4 צמתים.

ב. (7 נקודות) חשבו תוך שימוש במשפט קירכהוף את מספר העצים הפורשים של הגרף מסעיף א.



ג. (8 נקודות) עבור  $n \geq 5$  טבעי, מהו מספר העצים הפורשים של הגרף המתקבל על ידי הסרת קשת אחת מהקליק על  $n$  צמתים? בשאלה זו ניתן אך אין זה חובה להשתמש במשפט קירכהוף.

**שאלה 6 (20 נקודות)** יהא  $k \geq 0$  מספר טבעי.

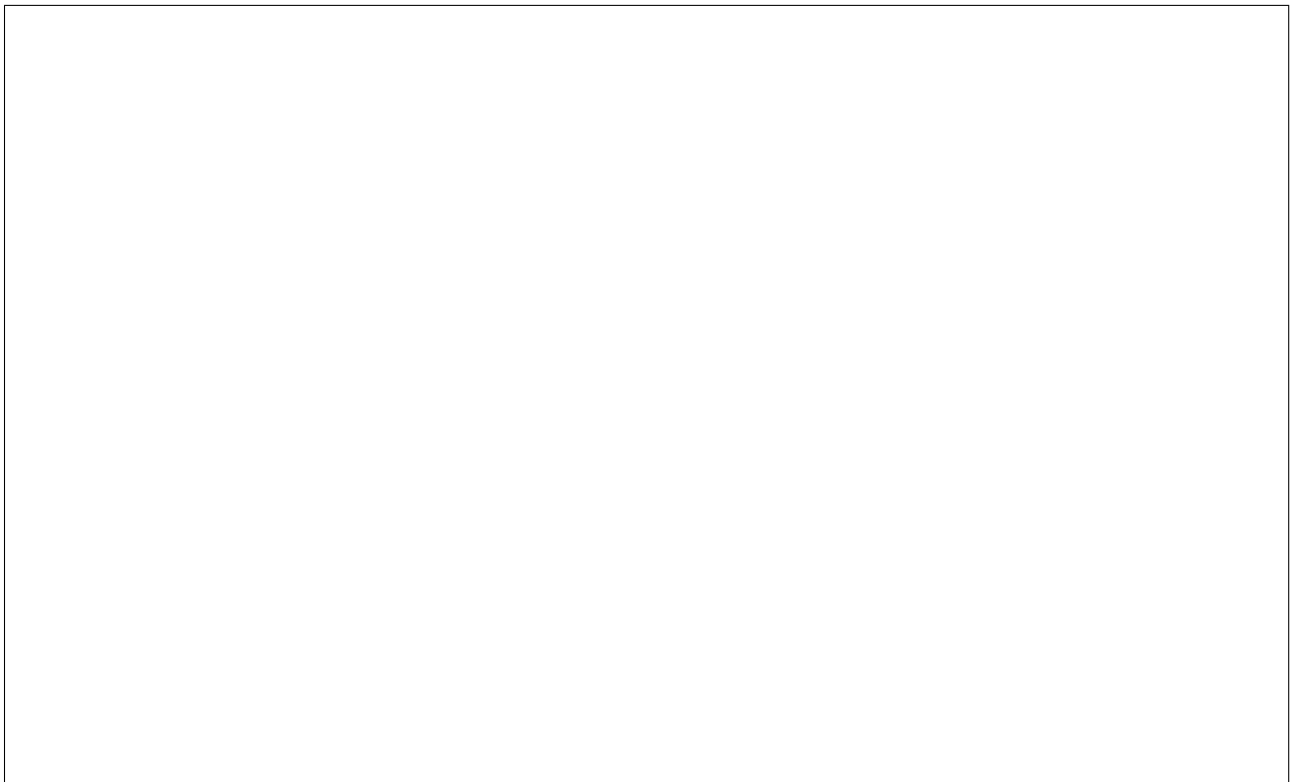
א. (6 נקודות) תארו במילים את המחלקה הקומבינטורית  $\mathcal{A}$  המתוארת על ידי היחס הסימבולי

$$\mathcal{A} = \text{SEQ}(a) \times (b \times \text{SEQ}(a))^k$$

כאשר  $a, b$  הם אטומים.

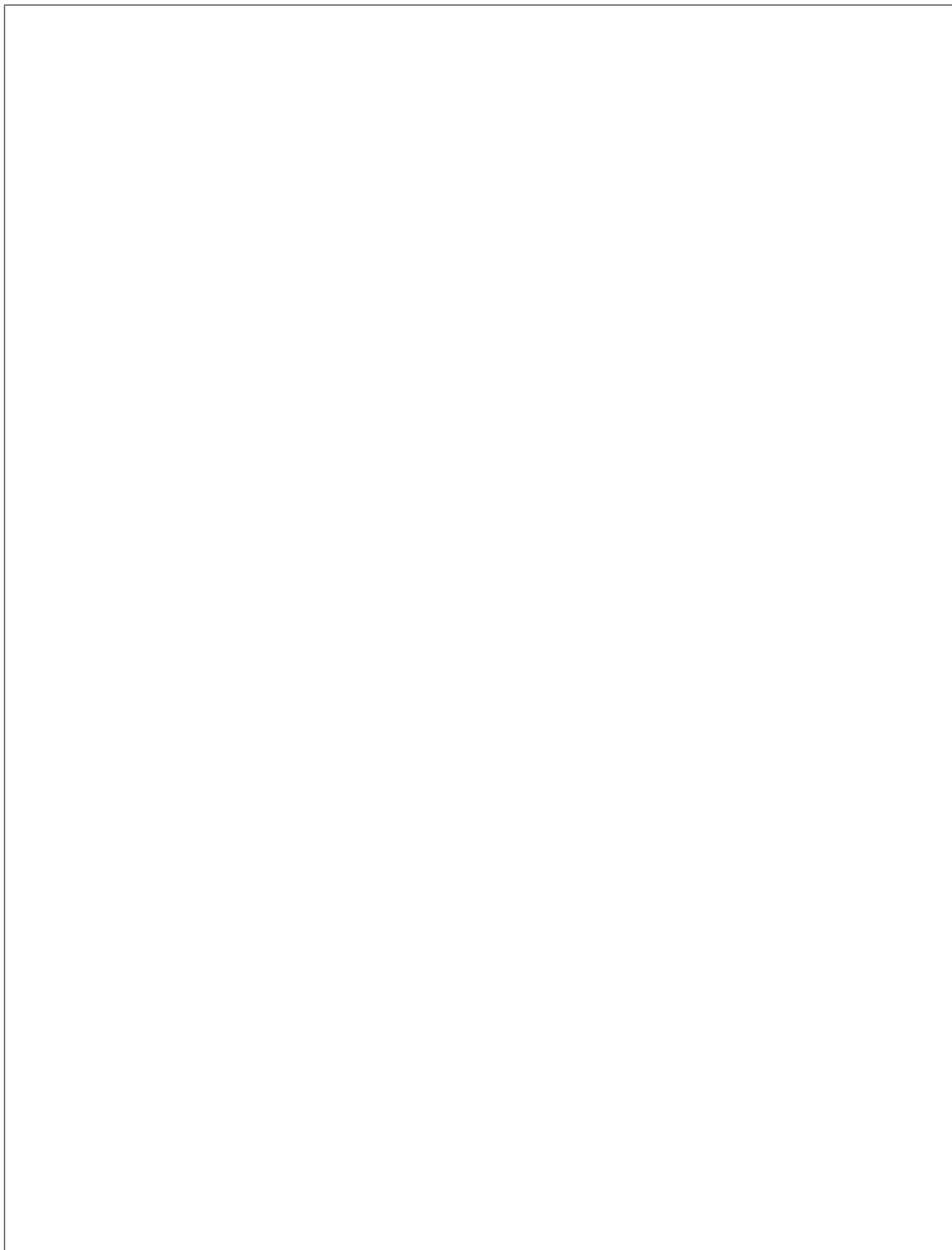


ב. (6 נקודות) מהי הפונקציה היוצרת המתאימה?



ג. (8 נקודות) חשבו את  $[x^n]A(x)$  עבור  $n \geq 0$  טבעי תוך שימוש בסעיף ב, והסבירו את המשמעות הקומבינטורית של התשובה שקיבלתם בהתייחס לתשובה שלכם מסעיף א.

מסגרת נוספת למקרה הצורך:



מסגרת נוספת שניה למקרה הצורך:

