

ע' קרין הפכה

לפה צחה

ע"כ כ"ק

עיקרון היכלה - הזנה לשם קדובו

לסבור כי B היא זוגי זרים כי

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

עבור קדובו A, B שיהיה.

מה אם A, B אינן שיהיה?

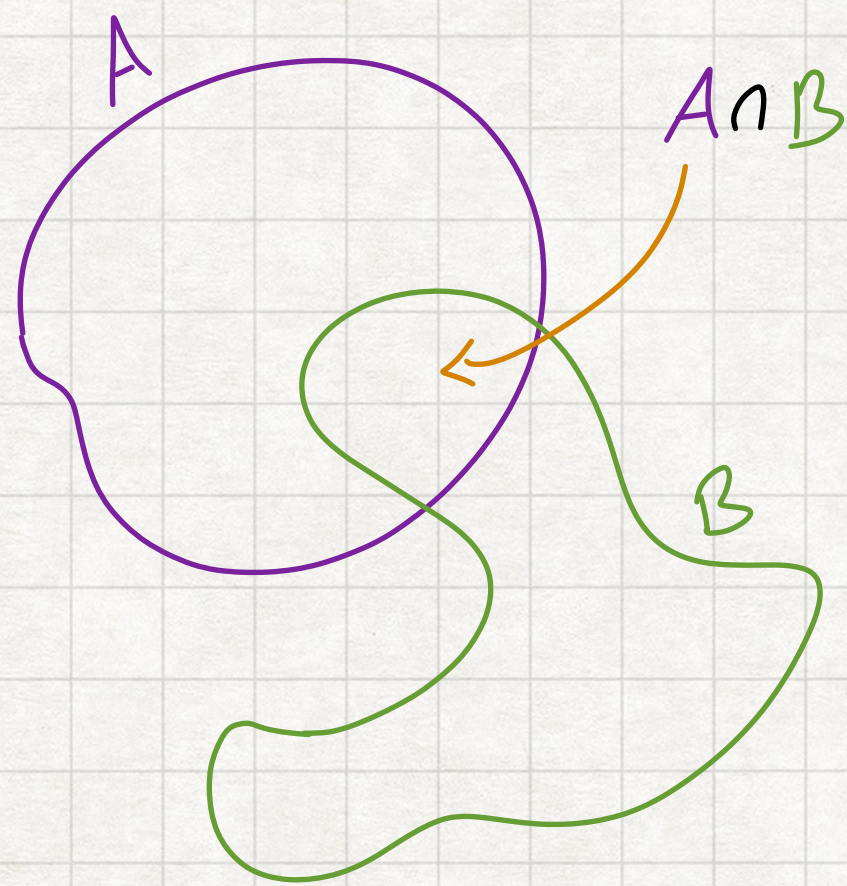
אם נספור את B האזורים A -נא ואת B האזורים B -נא

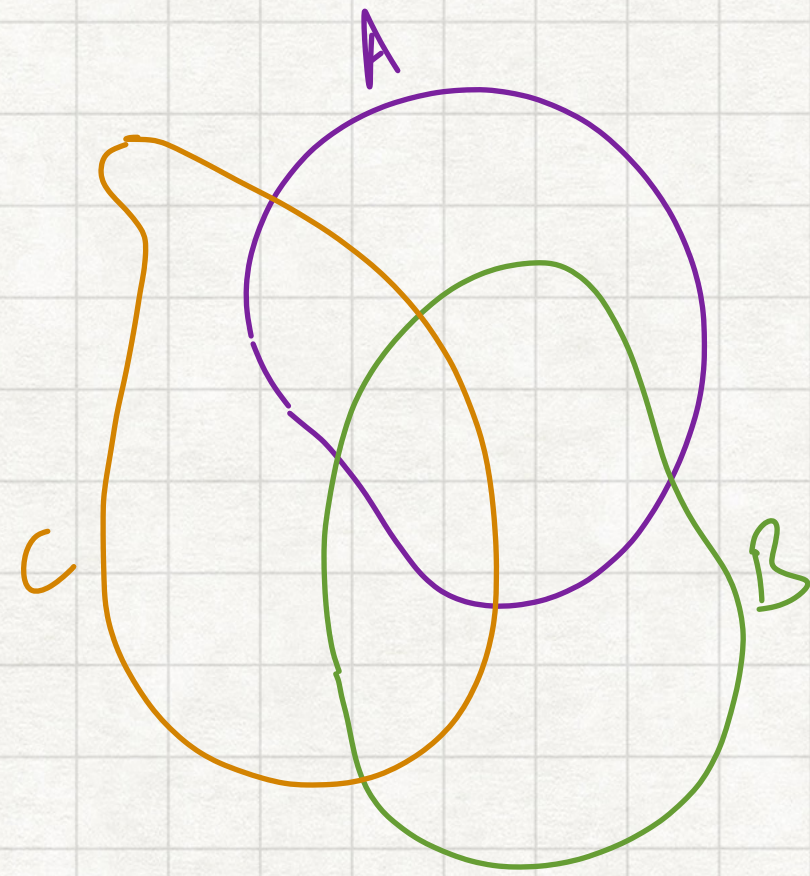
אז, את אותם אזורים הזינג $A \cap B$ "נספרו פעמיים - פעם A -נא

ופעם B -נא. על כן "נזקקו" את התשובה χ כן לנסר 1 מהתשובה.

עבור B אינן הזינג. נקרא כי

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



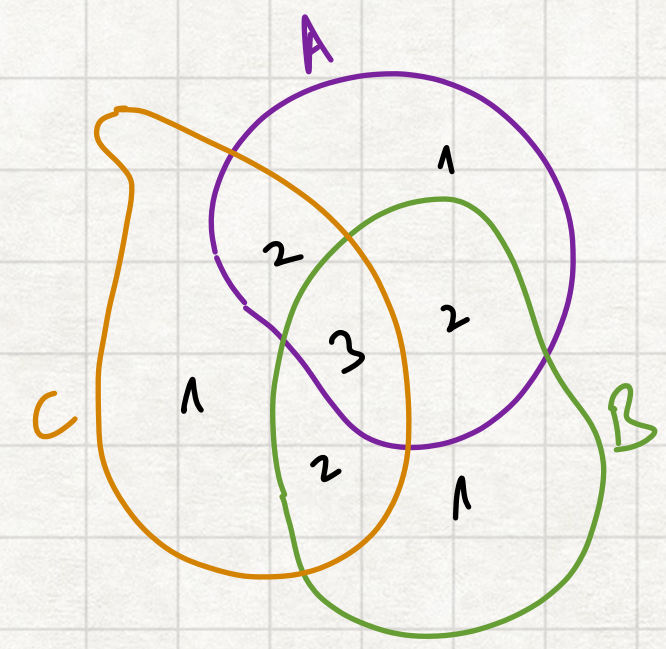


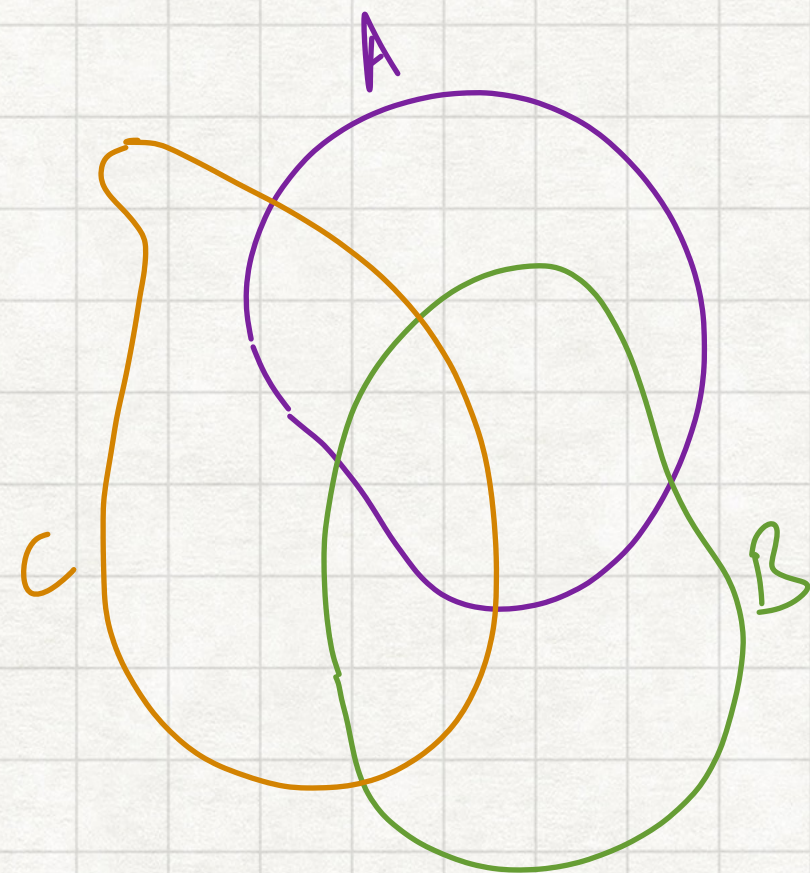
עיקרון ההכלה - הזמנה לשלש קבוצות

כמו במקרה של קבוצות, נחיל את מספר ה- A ו- B

A-? , B-? , C-? מהי המעלה הכוללת?

$$|A| + |B| + |C| =$$

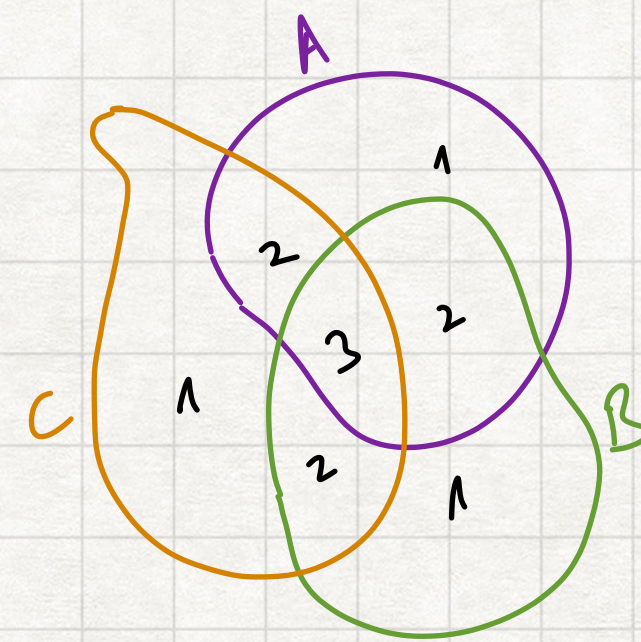




עיקרון ההכלה - הזתה לשלש קבוצות →

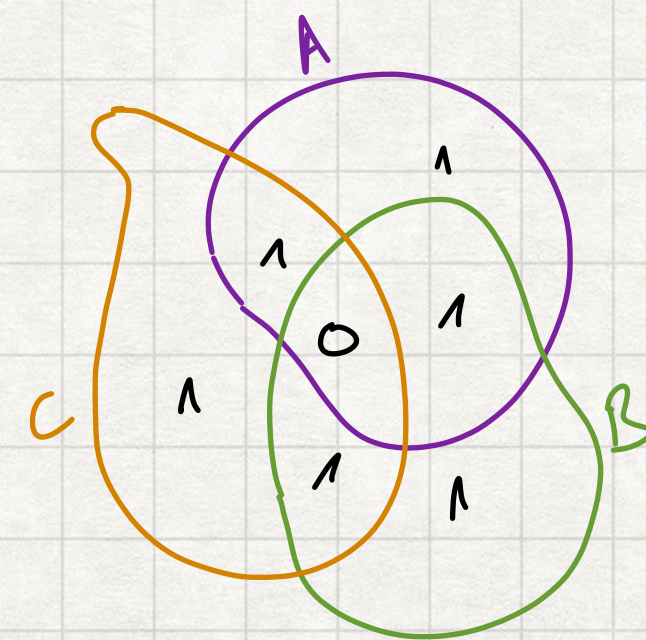
כמו במקרה של שתי קבוצות → נתיחם למספר ב איזה
 קבוצה A, B או C נכלי התחלה דחיתוכים.

$$|A| + |B| + |C| =$$



כעת צריך לנתק את הדחיתוכים. נתיחם למספר את הדחיתוכים קטנים →

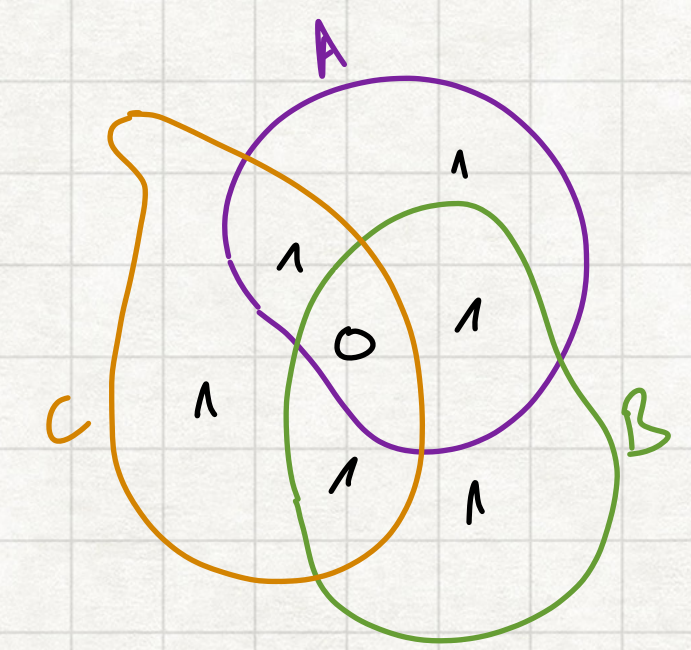
$$|A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) =$$



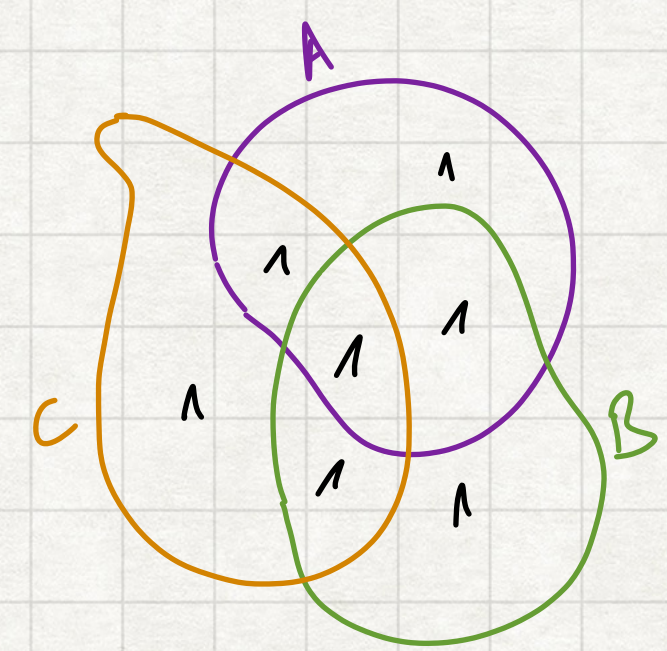
עיקרון היכלה - הזנה לשלש קהובו

כעז ציור עתקן אר התטוכים. נתחיל מלחסר אר התטוכים קסועו

$$|A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) =$$



הגזמנו. נתקן ע"י כן הוזה אר $|A \cap B \cap C|$ ונקדם



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$

לאלה 1

כמה מספרים שלמים בין 1 ל-300 מתחלקים ל-3? ל-5? ל-15?

שאלה 1

כמה מספרים שלמים בין 1 ל-300 מתחלקים ל-3 או ל-5?

פתרון חזק

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 ...

לכן בין 1 ל-300 יש 7 מספרים, והתוצאה היא מתזויה. $\frac{300}{15} = 20$

$$\frac{300}{15} \cdot 7 = 140$$

התשובה היא

שאלה 1

כמה מספרים שלמים בין 1 ל-300 מתחלקים ל-3 או ל-5?

פתרון בצורה הכלה-הצטמה

נסו

$$A = \{n \in [300] : 3 | n\}$$

$$B = \{n \in [300] : 5 | n\}$$

המספרים אלו אינם זרים. $|A \cup B|$ קל לראות כי

$$|A| = \frac{300}{3} = 100$$

$$|B| = \frac{300}{5} = 60$$

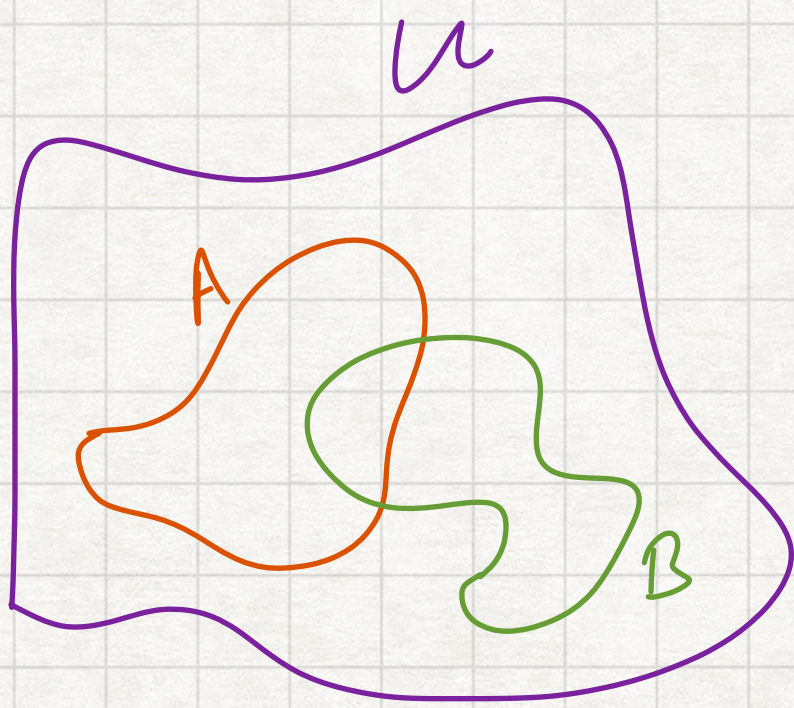
$$|A \cap B| = \frac{300}{15} = 20$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 100 + 60 - 20 = 140$$

ולכן

צ'יקרון ההכלה - הצורה המשלים עבור שני קבוצות

פצ'יטס קבוצות - כל קבוצה (A, B, \dots) תכונה שלא נכ'ה עקיים
 ולכן נ'עצ'ן לא - $|A \cup B|$ אלא - $|A \cap B|$ כ'המשלים הוא קיים
 עקב זה U כ'שה'.



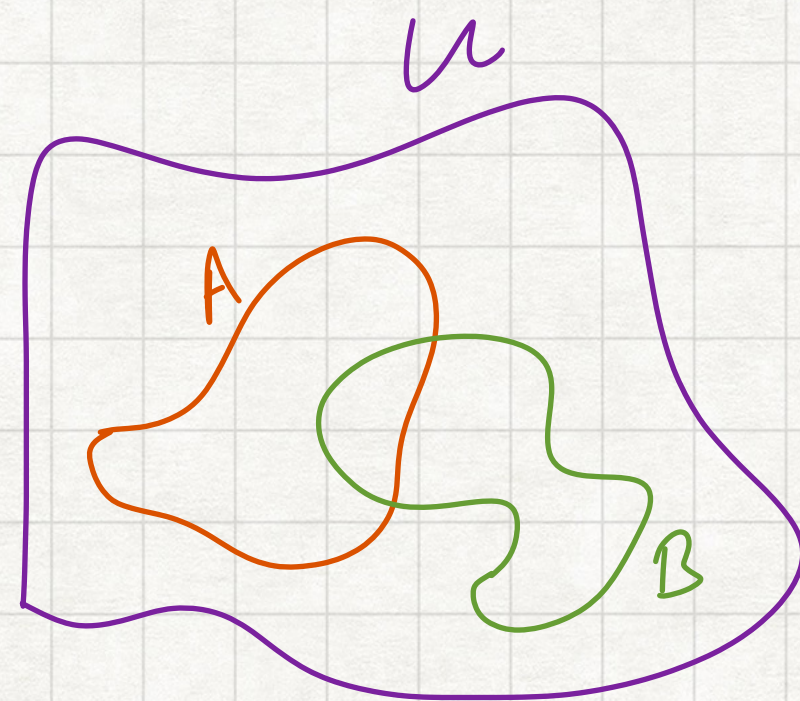
כל האיברים לאינס מקיים
 א - תכונה A ואינס מקיים
 א - תכונה B.

נס'ה - $|A \cap B|$ נוס'ה נוס'ה:

זה-הוא
 $|A \cap B| = |\overline{A \cup B}|$

המשלים נוס'ה קיים - U
 $= |U| - |A \cup B|$

צ'יקרון ההכלה - הצורה
 ע'ש' קבוצות
 $= |U| - (|A| + |B| - |A \cap B|)$
 $= |U| - (|A| + |B|) + |A \cap B|$



עיקרון ההכאה - הצחה המשלים עזר לנו קצת

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |U| - (|A| + |B|) + |A \cap B|$$

מה עזר לנו שם קצת?

$$\begin{aligned}
 |\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| &= |U| - (|A| + |B| + |C|) \\
 &\quad + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) \\
 &\quad - |A \cap B \cap C|
 \end{aligned}$$

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |U| - (|A| + |B| + |C|)$$

$$+ (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|)$$

$$- |A \cap B \cap C|$$

עמוד 2

נתונים 9 כדורים - 3 מהם בצבע אדום, כחול וירוק כך שהכדורים

מאידם בצבע שחור.

א. כמה דרכים ניתן לסדר את הכדורים לשורה?

ב. כמה אידם רק שלא יהיו 3 כדורים סמוכים באותו הצבע?

שאלה 2

נתונים 9 כדורים - 3 מהם צבע אדום, כחול וירוק כק להכדורים

מאט צבע זהים.

א. כמה דרכים ניתן לסדר את הכדורים לשורה?

פתרון סעיף א'

אם הכדורים היו שונים היו אפשרות לסדרם לשורה.

לצורך ניסוי מחשבת כי נכתב קצתו - על כדור מהם צבע אדום מספרים 1, 2 או 3, 6 אחר על כדור אחר.

1	2	1	3	3	2	2	1	3
1	2	1	3	3	2	2	1	3
2	3	1	2	3	1	2	1	3
2	3	1	2	3	1	2	1	3
3	2	1	1	3	2	2	3	1
3	2	1	1	3	2	2	3	1

שאלה 2

נתונים 9 כדורים - 3 מהם צבע אדום, כחול וירוק כק להכדורים
מאט צבע זהים.

א. כמה דרכים ניתן לסדר את הכדורים לשורה?

פתרון סעיף א'

אם הכדורים היו שונים היו 9! אפשרויות לסדרם לשורה.

לצורך ניסוי מחשבת כי נכתב קצתו של א' כדור מהם צבע אדום המספרים 1, 2 או 3, 6 אחרו על כדור אחר.



ישנם סידורים אלו יצגו כאלו נחלק את המספרים להוספנו. לייב צ'וק ניתן

לחלק את הסידורים עם המספרים לקבוצות 6 אחר קבוצה $(3!)^3$ כך שכל

הסידורים בה להיות את אלו הסידור הלא מאוסר, וקבוצה שונה לשורה

סידורים שונים. התשובה היא לכן

$$\frac{9!}{(3!)^3}$$

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |U| - (|A| + |B| + |C|)$$

$$+ (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|)$$

$$- |A \cap B \cap C|$$

עמוד 2

נתונים 9 כזורים - 3 מהם צרע אדם, כחול וירוק כך שהכזורים

מלא צרע שיהי.

? כמה אף רק שלא יהיו 3 כזורים סמוכים קאווי הצרע?

פתרון סעיף ב'

נסמן -

R את קזורת כל הס'זורים קהם 3 הכזורים האדומים סמוכים.

B את קזורת כל הס'זורים קהם 3 הכחולים סמוכים.

G " " הירוקים סמוכים.

א את קזורת כל הס'זורים.

אנ מעוניינים - $|\bar{R} \cap \bar{B} \cap \bar{G}|$ (כאשר המשלים הוא ביחס ל-U).

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |U| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C|$$

פתרון סגור?

נסמן ->

R את קבוצת כל הס'ורים בהם \exists הכזורים האדומים סמוכים.

B את קבוצת כל הס'ורים בהם \exists הכזורים הכחולים סמוכים.

G " " הירוקים סמוכים.

U את קבוצת כל הס'ורים.

אנן מעוניינים -> $|\bar{R} \cap \bar{B} \cap \bar{G}|$ (כאשר המשלים הוא גיוס \bar{A} -ס).

לצורך כך, ומסימטריה, מספיק לחשב את $|R \cap B \cap G|, |R \cap B|, |R|$.

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |U| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C|$$

פתרון סגור?

נסמן ->

R את קבוצת כל הס'ורים בהם \exists הכורים האדומים סמוכים.

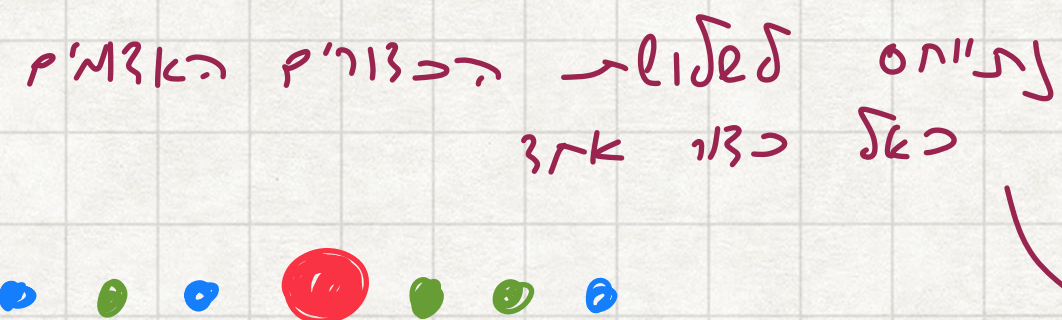
B את קבוצת כל הס'ורים בהם \exists הכורים הכחולים סמוכים.

G " " הירוקים סמוכים.

U את קבוצת כל הס'ורים.

אנן מעוניינים -> $|\bar{R} \cap \bar{B} \cap \bar{G}|$ (כאשר המשלים הוא גיוס \bar{U}).

לצורך כך, ומסימטריה, מספיק לחשב את $|R|, |R \cap B|, |R \cap B \cap G|$.



$$|R| = \frac{7!}{(3!)^2}$$

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |U| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C|$$

פתרון סעיף ז'

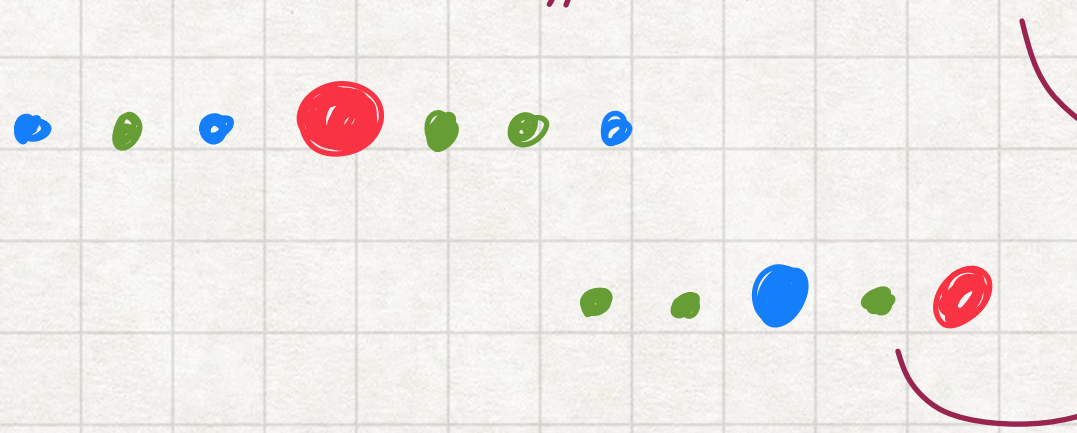
נסמן ->

- R את קבוצת כל הס'ורים בהם 3 הכזורים האדומים נמוכים.
- B את קבוצת כל הס'ורים בהם 3 הכזורים הכחולים נמוכים.
- G " " הירוקים נמוכים.
- U את קבוצת כל הס'ורים.

אנן מעוניינים -> $|\bar{R} \cap \bar{B} \cap \bar{G}|$ (כאשר המשלים הוא ג'וס 8-U).

לצורך כך, ומסימטריה, מספיק לחשב $|R|, |R \cap B|, |R \cap B \cap G|$

נתייחס כאלו 7 כזורים אדומים



$$|R| = \frac{7!}{(3!)^2}$$

$$|R \cap B| = \frac{5!}{3!}$$

$$|R \cap B \cap G| = 3!$$

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |U| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C|$$

פתרון סגור?

נסמן ->

R את קבוצת כל הס'ורים בהם 3 הכזורים האדומים. סומים.

B את קבוצת כל הס'ורים בהם 3 הכזורים הכחולים. סומים.

G " " הירוקים. סומים.

U את קבוצת כל הס'ורים.

$$|R| = \frac{7!}{(3!)^2}$$

$$|R \cap B| = \frac{5!}{3!}$$

$$|R \cap B \cap G| = 3!$$

$$|\bar{R} \cap \bar{B} \cap \bar{G}| = |U| - 3|R| + 3|R \cap B| - |R \cap B \cap G|$$

$$= \frac{7!}{(3!)^3} - \frac{3 \cdot 7!}{(3!)^2} + \frac{3 \cdot 5!}{3!} - 3!$$

נוסחת ההכללה - הציבה - המקרה הכללי

תהייה A_1, \dots, A_n קבוצות סופיות. אז

אנחנו מניחים שהיתוך של קבוצה
חיקה של קבוצות הוא קבוצה-
חיקה

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|+1} \left| \bigcap_{j \in S} A_j \right|$$

דבר, במקרה הספציפי בו $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$ אנו רוצים דגימה של האינדקסים
האלו i_1, \dots, i_k מתקיים

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left| \bigcap_{j \in [k]} A_j \right|$$

נוסחת הכלכלה - המקרה הכללי

נתונה A_1, \dots, A_n קבוצות סופיות. אז

אנו מחינים שיתוך של קבוצה
ריקה של קבוצות הוא קבוצה ריקה

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|+1} \left| \bigcap_{j \in S} A_j \right|$$

הוכחה

נקח $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$ \times מרחם \mathbb{Z}_2 של x \rightarrow $T = \{i \in [n] \mid x \in A_i\}$ \rightarrow $|T| = t$

$$T = \{i \in [n] \mid x \in A_i\} \quad |T| = t$$

נבחין כי המרחם \mathbb{Z}_2 של x \rightarrow $S \subseteq T$ \rightarrow $(-1)^{|S|+1}$ \rightarrow $S \neq \emptyset$

$\binom{t}{k}$ קבוצות \rightarrow קבוצות k של T \rightarrow $(-1)^{k+1}$

ולכן \times נוסח \rightarrow של x

$$\sum_{k=1}^t (-1)^{k+1} \binom{t}{k} = 1$$

ראינו כי $0 = \sum_{k=0}^t (-1)^k \binom{t}{k}$

נוסחת ההכללה - המקרה הכללי

תהייה A_1, \dots, A_n תתי-קבוצות של קבוצה סופית Ω . אז

$$|\bigcap_{j \in \phi} A_j| = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} |\bigcap_{j \in S} A_j|$$

עם התקנה e

$$\bigcap_{j \in \phi} A_j = \Omega$$

דבר דומה "הסימטרי"

$$|\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} |\bigcap_{j \in [k]} A_j|$$

שאלה 3 - קצ"ח הפקיד השלם

פקיד שיכור הגיע לעבודה. הקוס שלו ביקש ממנו לשלם n הכתמים n - n יציים.
מהו מספר האפשרויות לשלם את n הכתמים n - n יציים נתון של n אחז יקל את הכתמו?

קניסה יתר פורמלי

תמונה של קבוצה A היא פונקציה \rightarrow שיוך $\pi: A \rightarrow A$.
מספר התמונות של קבוצה קבוצה n היא $n!$.

נאמר $a \in A$ היא נקודה \rightarrow של π אם $\pi(a) = a$.

קשורה 3 אנו שואלים כמה תמונות \rightarrow על $[n]$ של נקודה \rightarrow ישנו?

נסמן מספר \rightarrow D_n .

קבוצה איזו פורמלי

תמורה על קבוצה A היא פונקציה \rightarrow שואף $\pi: A \rightarrow A$.

נספר התמורות על קבוצה קצרה n היא $n!$.

נקרא $a \in A$ - נקודת קצה של π אם $\pi(a) = a$.

האם יש 3 אנון של אברים כזה תמורה γ על $[n]$ ללא נקודת קצה יש?

כן D_n - נספר

$n=4$

	1	2	3	4
1	2	1	4	3
2	2	3	4	1
3	2	4	1	3
4	3	1	4	2
5	3	4	1	2
6	3	4	2	1
7	4	1	2	3
8	4	3	1	2
9	4	3	2	1

$n=3$

	1	2	3
	1	2	3
	1	2	3
	1	3	2
	2	1	3
1	2	3	1
2	3	1	2
	3	2	1

$n=2$ \rightarrow 2

	1	2
	1	2
	1	2
1	2	1

מתוך אלה 3

נסמן $u \rightarrow k$ קודם \rightarrow בסדר המוחלט $[n]$.

עבור $i \in [n]$ נסמן $A_i \rightarrow$ המוחלט i בנג' עבר.

כל העיניים \rightarrow

המקרה הספציפי של עקרון הכללי - הבהגה המשלים

$$\left| \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i} \right| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left| \bigcap_{j \in [k]} A_j \right|$$

מספר המוחלט $[n]$ ב $k, \dots, 1$ הן n עבר

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k! \cancel{(n-k)!}} \cancel{(n-k)!}$$

$$= n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = D_n$$

מתוך טבלה 3

$$D_n = n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

הערה

נניח שיש לנו סדרה a_n ונגדיר $b_n = \frac{1}{a_n}$ אז $a_n = \frac{1}{b_n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$$

ולכן $\frac{D_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}$ כלומר $D_n \sim \frac{n!}{e}$ כלומר D_n קרוב ל $\frac{n!}{e}$!

אפשר אפילו להוכיח כי

$$D_n = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rfloor & n \text{ זוגי} \\ \left\lceil \frac{n!}{e} \right\rceil & n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

שאלה 4

תהי A קבוצה קבוצת א.

א. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ יש?

ב. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ עם נקודת שבת יש?

ג. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ עם נקודת שבת יש?

ד. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ עם נקודת שבת יש?

שאלה 4

תהי A קבוצה קצרה.

- א. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ יש?
- ב. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ עם נקודת שבת יש?
- ג. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ עם נקודת שבת יש?
- ד. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ עם נקודת שבת יש?

פתרון

א. n^n , מעריקין הכפול.

שאלה 4

תהי A קבוצה קבוצת A .

א. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ יש?

ב. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ עם נקודת שבת יש?

ג. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ עם נקודת שבת יש?

ד. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ עם נקודת שבת יש?

פתרון

א. n^n , מעריקון הכפל.

ב. $(n-1)^n$ שזו מעריקון הכפל

שאלה 4

תהי A קבוצה קבוצת A .

א. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ יש?

ד. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ עם נקודת שבת יש?

ג. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ עם נקודת שבת יש?

ב. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ עם נקודת שבת יש?

פתרון

א. n^n , מעריקון הכפל.

ד. $(n-1)^n$ שזו מעריקון הכפל

ג.

ב. D_n כפי שהוכחנו.

שאלה 4

תהי A קבוצה קבוצת A .

א. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ יש?

ד. כמה פונקציות $f: A \rightarrow A$ לא נקראת שגור יש?

ג. כמה פונקציות ח"ע $f: A \rightarrow A$ לא נקראת שגור יש?

ב. כמה פונקציות שיוק $f: A \rightarrow A$ לא נקראת שגור יש?

פתרון

א. n^n , מעריקין הכפל.

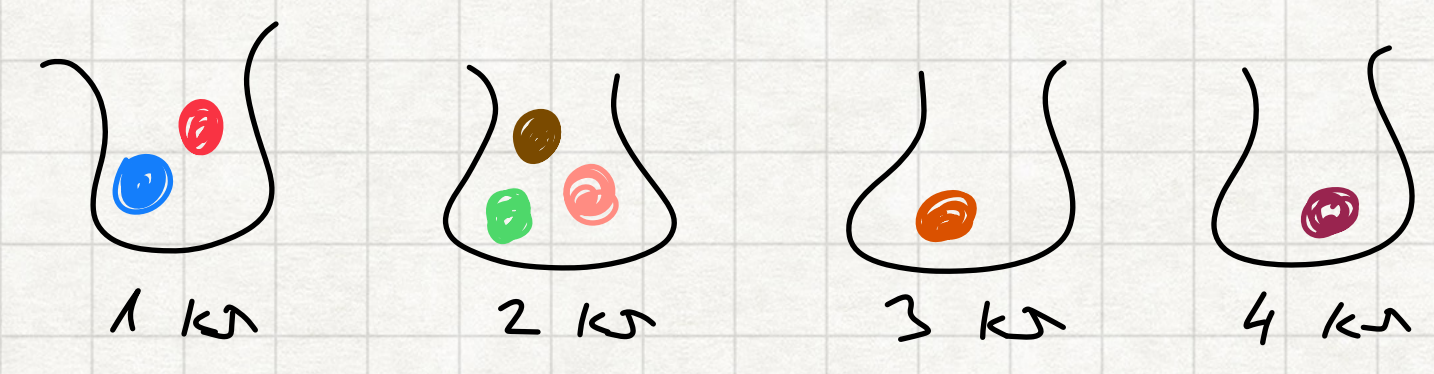
ד. $(n-1)^n$ שז מעריקון הכפל

ג. $\sum_{k=1}^n D_n$ לכן A סופית ולכן f מהיורה ח"ע $n-A$ לעצמה היא $\sum_{k=1}^n$ ולכן ש"ל.

ב. D_n כפי שהוכחנו.

שאלה 5

דבנה אולפנס אפרה לחלק א כזורים שונים 8-4 הוא שניים כג לאל
הא לא "שאר ריק - אין חסר - לסדר הכזורים קטן הוא?



שאלה 5

ד כמה אופן אפשר לחלק n כדורים שונים $n-4$ תאים שונים כך שלא תהיה תא "שאר" היקף - ואין תחתיה מספר הכדורים קטן מהתאים?



פתרון לשני

הנה קטן קטן! נחלק n כדורים מתוך ה- n ונכנס "דפדפם" את התאים כך שיוקמה תא "שאר" היקף. נצטרך n

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = \binom{n}{4} \cdot 4!$$

קחתי כדור מספר 1
קחתי כדור מספר 2, נאלץ שיהיה עקר תא 2

נניח מראש נחלק n כדורים מתוך ה- n לפי נפצי קאמ-מקין $4!$ אפשרות לתאים השונים

אפשרות - אחרי שעשנו זאת נותרו עם $n-4$ כדורים שונים ולפיכך (מבלי לנסות להיקנות התאים) יש 4^{n-4} אפשרות.

התשובה הסופית היא $\binom{n}{4} \cdot 4! \cdot 4^{n-4}$

שאלה 5

דכמה אופנים אפשר לחלק 4 כדורים שונים ל-4 תאים שונים כך שלא תהיה ירידה - ואין חסר - לסדר הכדורים בתוך התאים?



הקציה דכתיוב העיו

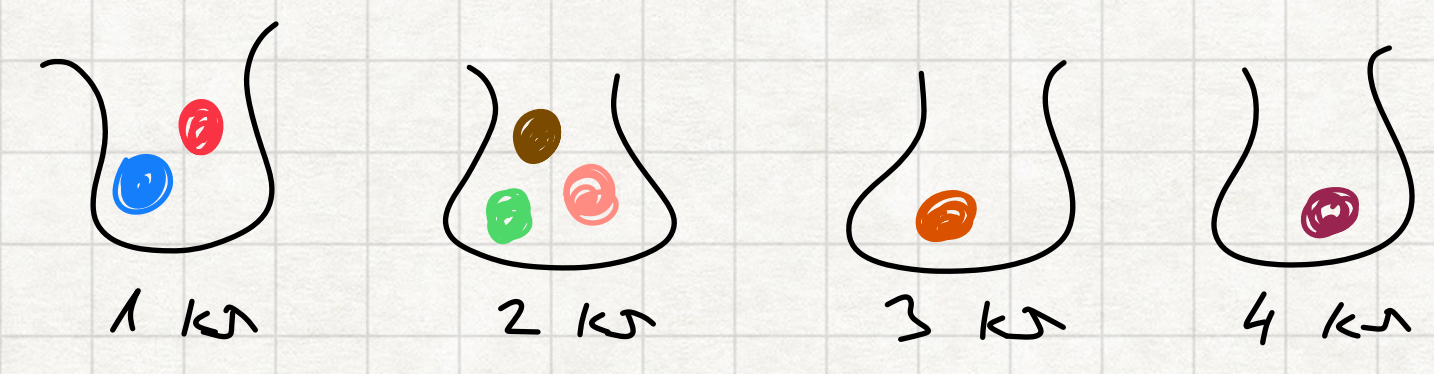
ביצע ספירה כפולה - מכיוון שאין חסירה לסדר בתוך תא נתיב, , אמשל נספר פנמי:



דערה הכנס סוג א סדר הלאכותי בתוך כל תא

שאלה 5

דבנה אופנים אפשר לחלק מ כדורים שונים ל-4 תאים שונים כך שלא
 תהא לא יילאר היק - ואין חסר - לסדר הכדורים קטן התאים?



פתרון (שורה ל' נכון ט')

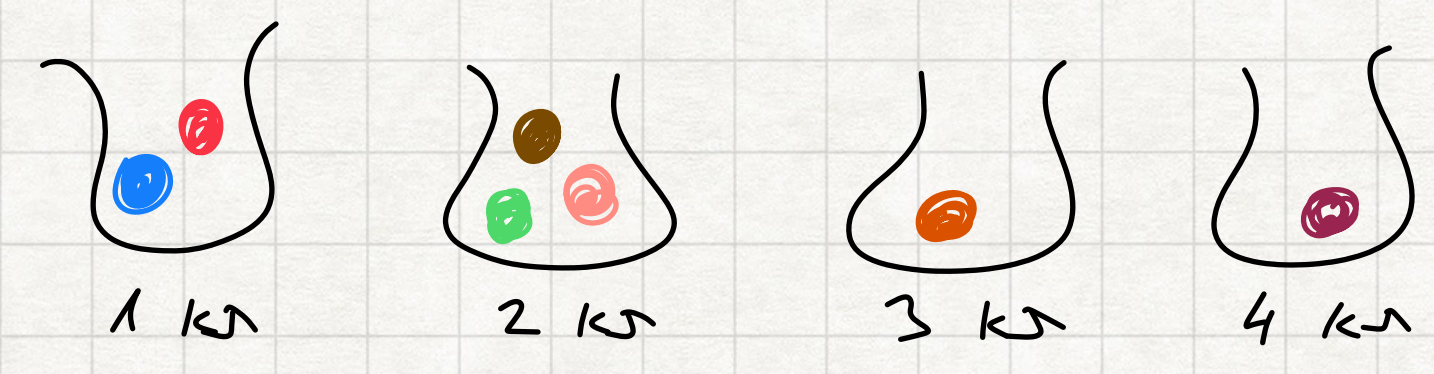
נצטר דהלה-היתה. ניסין?

$A_1 = \text{כל הסיקורים ש מ הכדורים ל-4 התאים כך שמה 1 נלאר היק.}$
 \vdots
 $A_4 = \text{כל הסיקורים ש מ הכדורים ל-4 התאים כך שמה 4 נלאר היק.}$
 $U = \text{כל הסיקורים ש מ הכדורים ל-4 התאים ללא הקלו.}$

אין נאיונים $= |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4|$

שאלה 5

דבנה אופנים אפשר לחלק מ כזורים שונים עם 4 מאם שונים כך לא
 תא לא ילאר היק - ואין חסר - לסדר הכזורים קטן המאם ?



פתרון (שורה ל' נכון ט')

נצטר דבלה - הזמה . ניסין ?

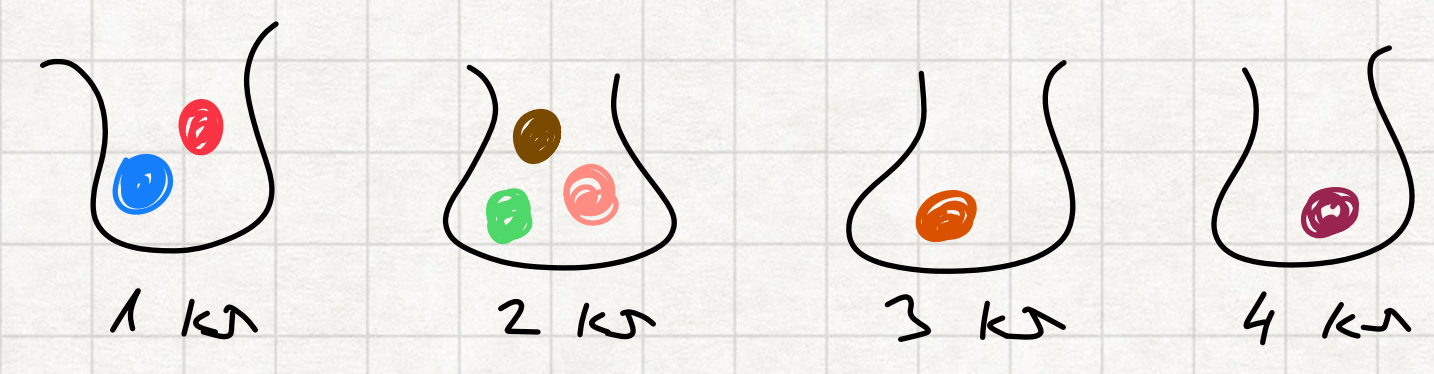
$A_1 = \{ \text{כזורים שם מ הכזורים עם 4 המאם כך למא 1 נלאר היק} \}$
 \vdots
 $A_4 = \{ \text{כזורים שם מ הכזורים עם 4 המאם כך למא 4 נלאר היק} \}$
 $U = \{ \text{כזורים שם מ הכזורים עם 4 המאם ללא הקלור} \}$

אני מצוינים $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4|$

מסמכה , ומציקיון הדבלה הזמה , מספיק עמש א $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|, |A_1|, |A_4|, |U|$ $\Rightarrow |A_1 \cap \dots \cap A_4|$

שאלה 5

קבוצה אופנים אפשר לחלק א כבזורים שונים 4-8 מאי שונים כך לקי
 וא לא יילאר היק - ואין חסר - לסדר הכבזורים קטן המאים ?



פתרון (שורה פתוחה)

נצטר קהלה - הזמה . פסיין ?

$A_i =$ כל הסיקורים ש א הכבזורים 4-8 המאים כך למא i נלאר היק .
 $U =$ כל הסיקורים ש א הכבזורים 4-8 המאים עלא הקלאר .

$$|U| = 4^n$$

$$|A_1| = 3^n$$

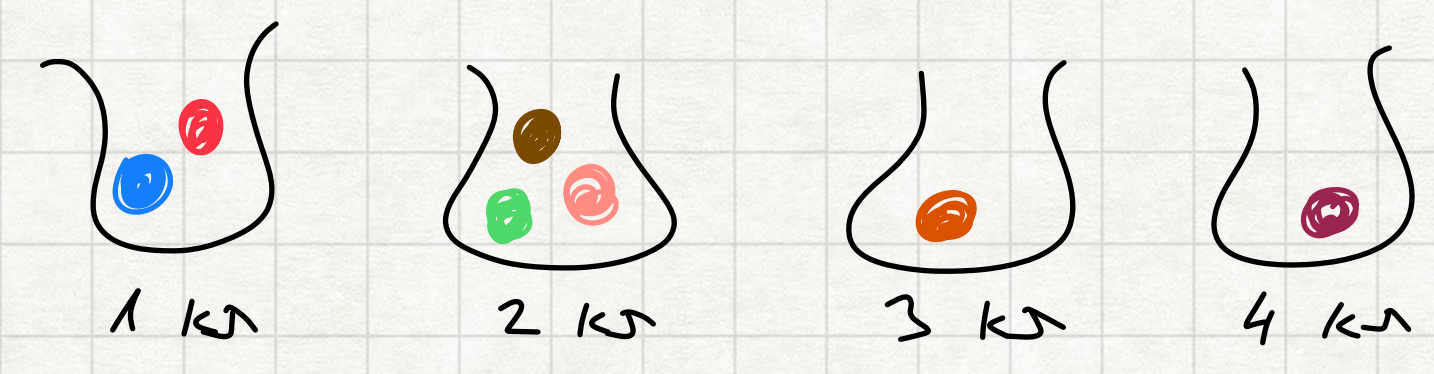
$$|A_1 \cap A_2| = 2^n$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$$

$$|A_1 \cap \dots \cap A_4| = 0$$

שאלה 5

דבנה אולניק אפשר לחלק n כדורים שונים $4-8$ תאים שונים כך לכל i תא לא יילאר היקף - ואין תא - לסדר הכדורים קטן התאים?



פתרון (שורה של פתרון)

נצטרך להגדיר - התהליך. נסמן A_i

$A_i =$ כל הכדורים שיש להם i תאים. נגדיר היקף.

$A =$ כל הכדורים שיש להם $4-8$ תאים. נגדיר היקף.

$|U| = 4^n$

$|A_1| = 3^n$

$|A_1 \cap A_2| = 2^n$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$

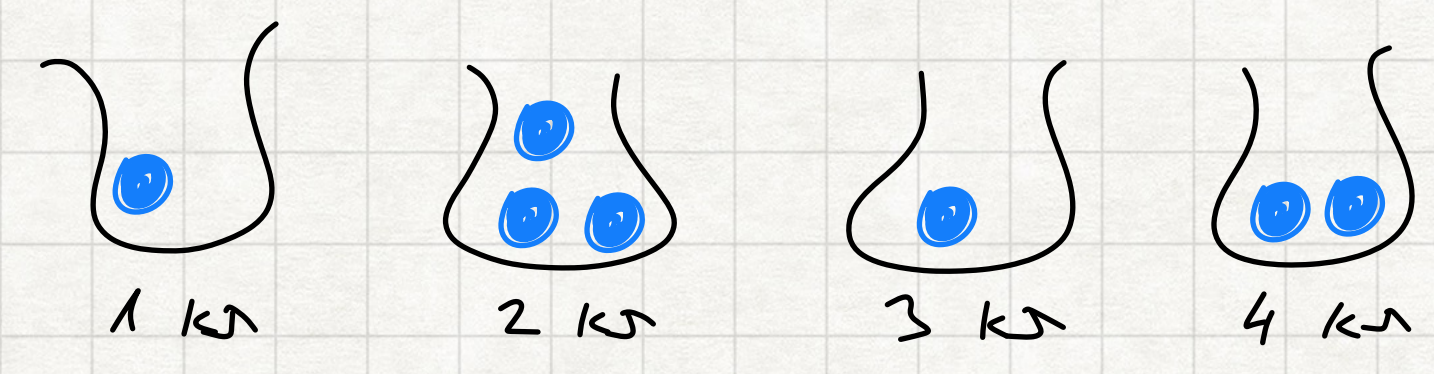
$|A_1 \cap \dots \cap A_4| = 0$

$\Rightarrow |\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_4| = |U| - 4|A_1| + 6|A_2| - 4|A_3| + |A_4|$
 $= 4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4$

$|\bar{\bigcap}_{i=1}^n A_i| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} |\bigcap_{j \in [k]} A_j|$

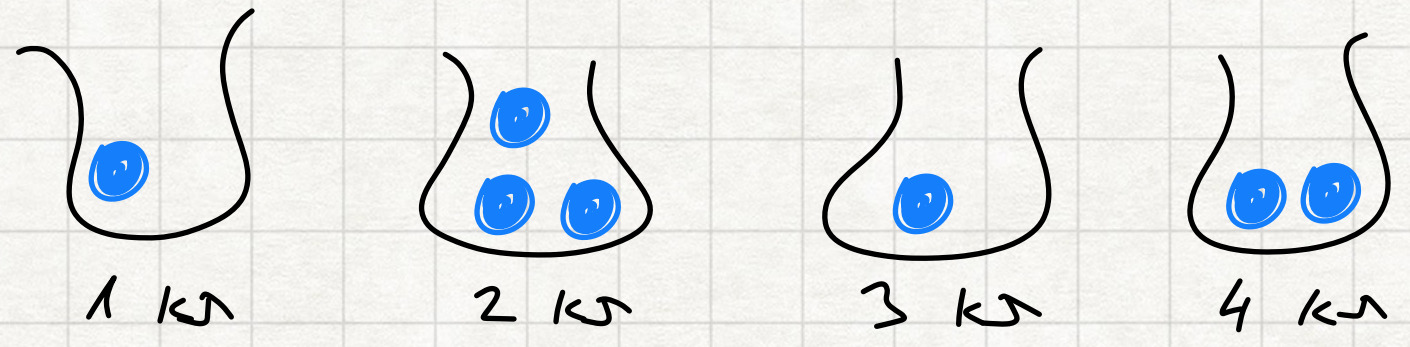
שאלה 5

ד כמה אולנים אפשר לחלק א כזורים ~~שנים~~ ^{שנים} 4-8 מאי שנים כן לא?
א לא ילאר היק - אין חסר - לסדר הכזורים קטן מאי?



שאלה 5

ד כמה אופנים אפשר לחלק 4 כדורים שונים ~~שונים~~ ^{צה"ם} 4-8 מאי שנים כך לא
תא לא יישאר ריק - ואין חסר - לסדר הכדורים קטן המאוס?

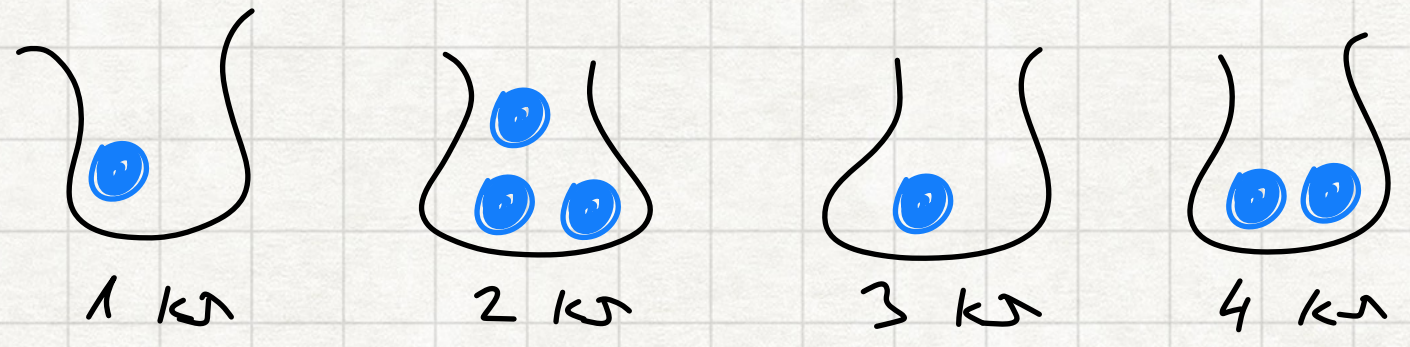


שה ציקרון הבאה - זהה?

דציקרון שה נימ אפשר קצת דמה. חילוק אק! אכל צי דהתא לא
הפתרון המובנה יותר שכן הוא ייתן קצת סכימה.

שאלה 5

קבוצה אופנים אפשר לחלק א כזורים ~~שונים~~ ^{שהם} 4-8 מאם שונים כן לא
תא לא "שאר" ריק - ואין חסר - לסדר בכזורים קטן המאם?



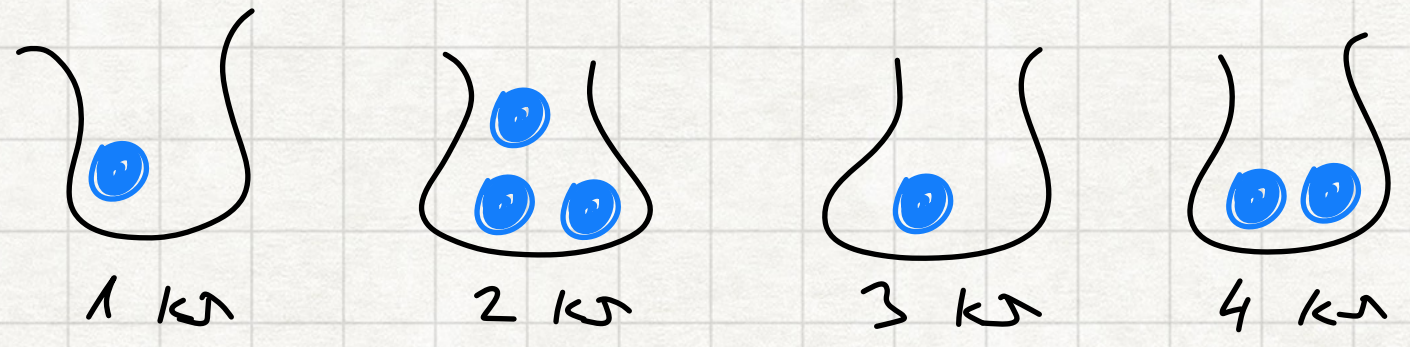
פתרון

נבחין כי ב פתרון מתקף ע"י כן שניהם כמה כזורים יש קב תא ודכסוף עקם לקב תא
ישן לפתור - כדור אחד. בלמה, אין מאוננים קמסר הפתרון - למעשה

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 8 \\ X_1, \dots, X_4 \geq 1 \end{cases}$$

שאלה 5

ד כמה אופנים אפשר לחלק n כדורים שונים ~~שונים~~ ^{זהים} $n-4$ מאם שונים כך לא?
 וא לא "שאר ריק" - ואין חסר - לסדר בכדורים קטן המאם?



פתרון

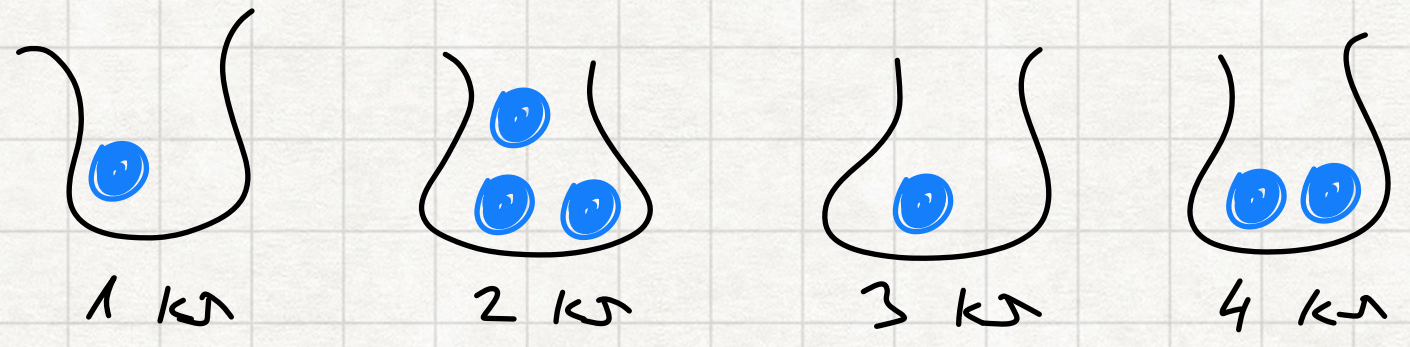
נבחין כי כל פתרון מתקף ע"י כך שנתיה כמה כדורים יש קב הוא וקבולו לק שלב הוא
 ישן לפחות כדור אחד. כלומר, אין מאוננים קמסר הפתרון למערכה

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = n \\ X_1, \dots, X_4 \geq 1 \end{cases}$$

אם היה התנאי $X_i \geq 0 \forall i$, אז היה קולט, הפתרון לולט כל האופנים הוא $\binom{n+3}{3}$

שאלה 5

ד כמה אופנים אפשר לחלק n כדורים שונים ~~שונים~~ ^{זהים} $n-4$ הוא שניים כך לכל
 וא לא ילאר ה"ק - ואין חסדו - לסדר הכדורים קטן הוא?



פתרון

אין אופנים קמסר התבונן למערכה \rightarrow

$$(*) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n \\ x_1, \dots, x_4 \geq 1 \end{cases}$$

אם היה התנאי $x_i \geq 0$ במקום, הפתרון כפי שהיון הוא $\binom{n-3}{3}$

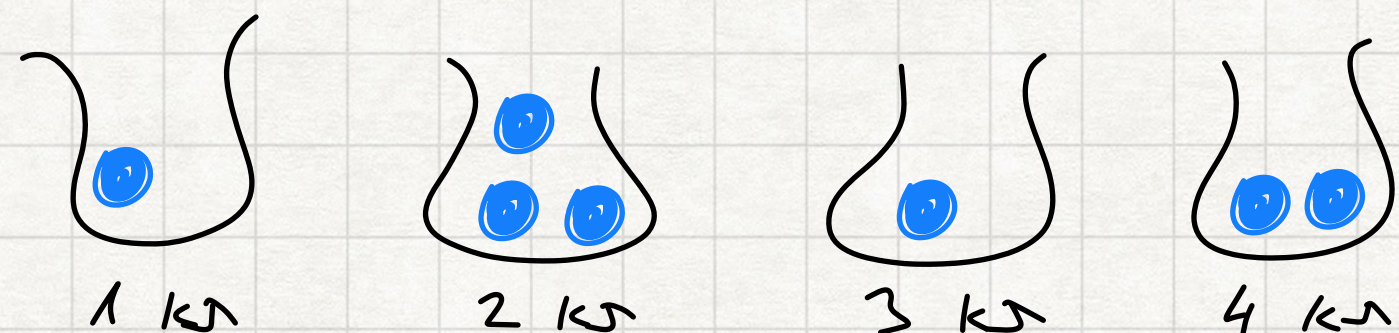
$$(**) \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = n-4 \\ y_1, \dots, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

נדעין כי פתרון אופנים למערכה $(*)$ נחלים כזיון עם פתרון למערכה \rightarrow
 אכן - הזיון נתן ע"י

$$(x_1, \dots, x_4) \mapsto (\underbrace{x_1-1}_{y_1}, \dots, \underbrace{x_4-1}_{y_4})$$

שאלה 5

ד כמה אופנים אפשר לחלק n כדורים שונים ~~שונים~~ ^{זהים} $n-4$ הוא שניים כך לכל
 וא לא יישאר ריק - ואין חסר - לסדר הכדורים קטן הוא ?



פתרון

אין אופנים להסיר הכדורים - \rightarrow $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$
 $(*) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n \\ x_1, \dots, x_4 \geq 1 \end{cases}$

אם היה התנאי $x_i \geq 0$ במקום, הפתרון כפי שהיון הוא $\binom{n+3}{3}$

$(**) \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = n-4 \\ y_1, \dots, y_4 \geq 0 \end{cases}$

נבחר n פתרון - \rightarrow $(*)$ נחלים כזיווג עם פתרון - \rightarrow $(x_1, \dots, x_4) \mapsto (\underbrace{x_1-1}_{y_1}, \dots, \underbrace{x_4-1}_{y_4})$

\Leftarrow הפתרון הוא $\binom{(n-4)+3}{3} = \binom{n-1}{3}$

1	5	3	2	4
3	4	1	5	2

שאלה 6

כמה פונקציות $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ מקיימות $f(f(x)) = x$ לכל $x \in \{1, \dots, n\}$?
כלומר, פונקציות הפיכות בעצמן (involutions).

1	5	3	2	4
3	4	1	5	2

שאלה 6

כמה מחיבור $2 \times n$ ישן עם הערכים $n, \dots, 1$ כך שקבלו שורה וקבלו
 עמולה יש ערכים שונים?

פתרון

ישן! זהו זרימים למלא את השורה הראשונה.
 עכ"ל אפשרות יש D_n זרימים למלא את השורה השנייה.

\Leftarrow התשובה היא $D_n \cdot n!$.