עיקרון ההכלה וההדחה

גיל כהן

עיקרון ההכלה - הדחה לשתי קבוצות

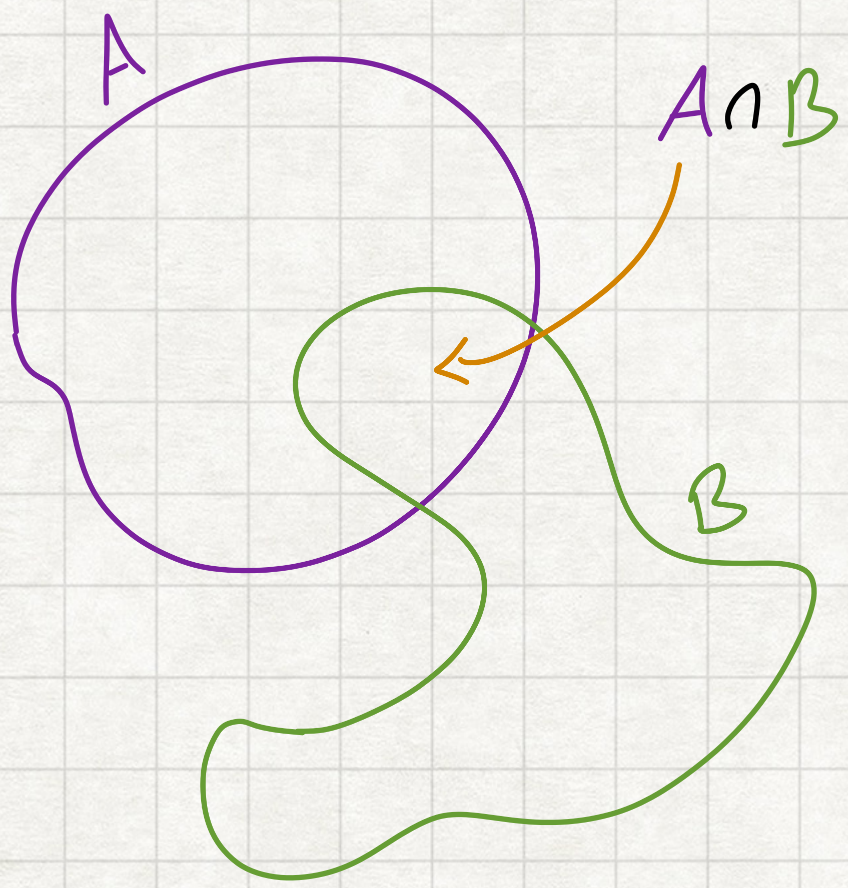
נזכור כי כלל החיבור גורס כי

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

עבור קבוצות A,B זרות.

מה אם A,B אינן זרות?

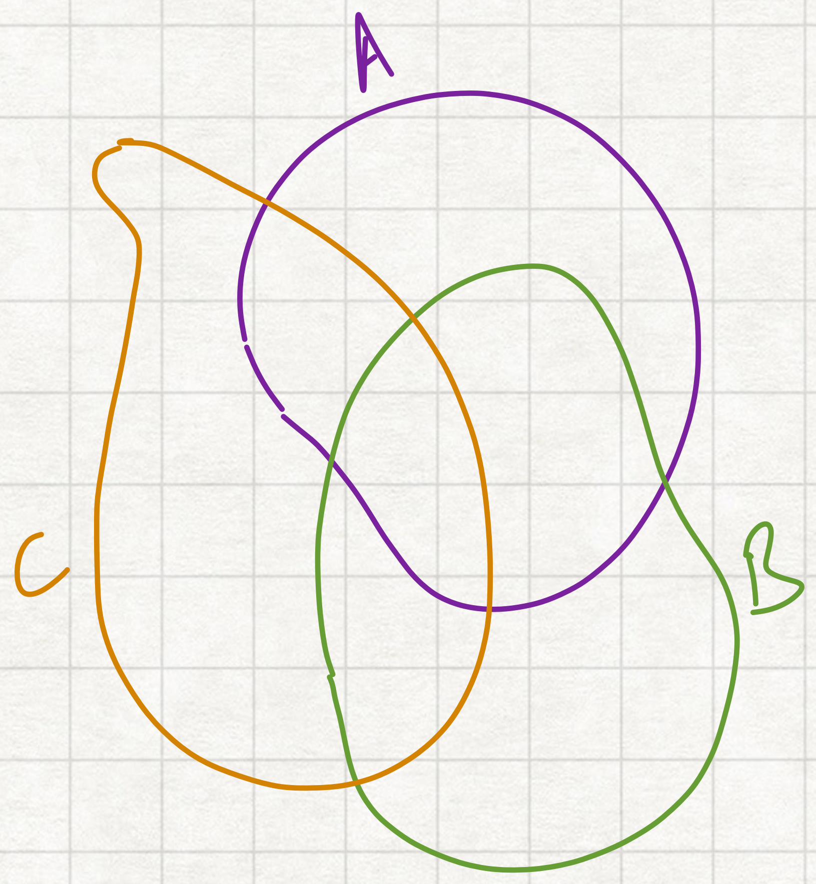
אם נספור את כל האיברים מ-A ואז את כל האיברים מ-B ונחבר, אז אותם איברים בחיתוך $A \cap B$ ייספרו פעמיים - פעם מ-A ופעם מ-B. על כן "נתקן" את התשובה ע"י כך שנחסר 1 מהתשובה עבור כל איבר בחיתוך. נקבל כי

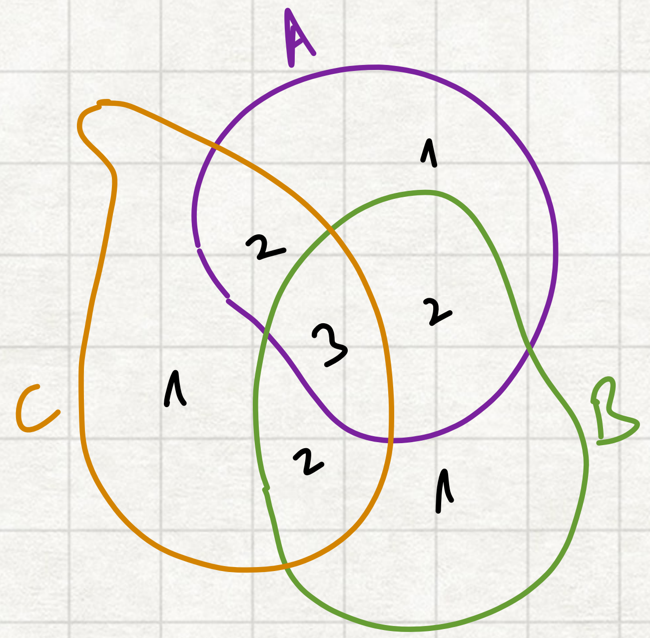


$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

עיקרון ההכלה-הדחה לשלוש קבוצות

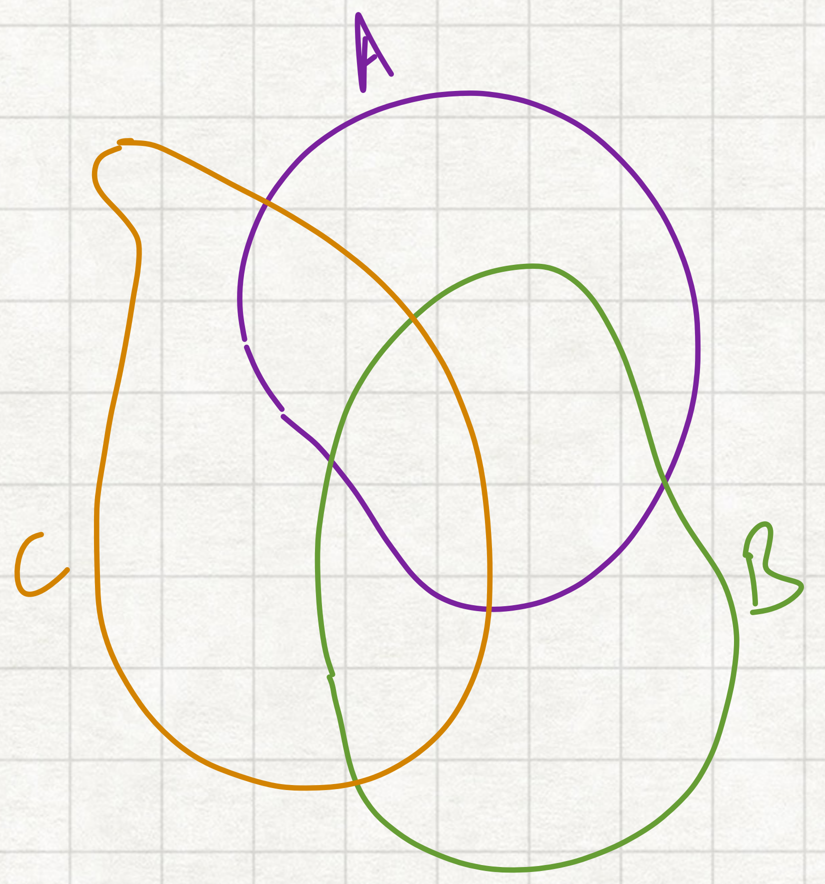
כמו במקרה של שתי קבוצות, נתחיל מלספור כל איבר ב-A, ב-B וב-C מבלי התחשבות בחיתוכים.





$$|A|+|B|+|C| =$$

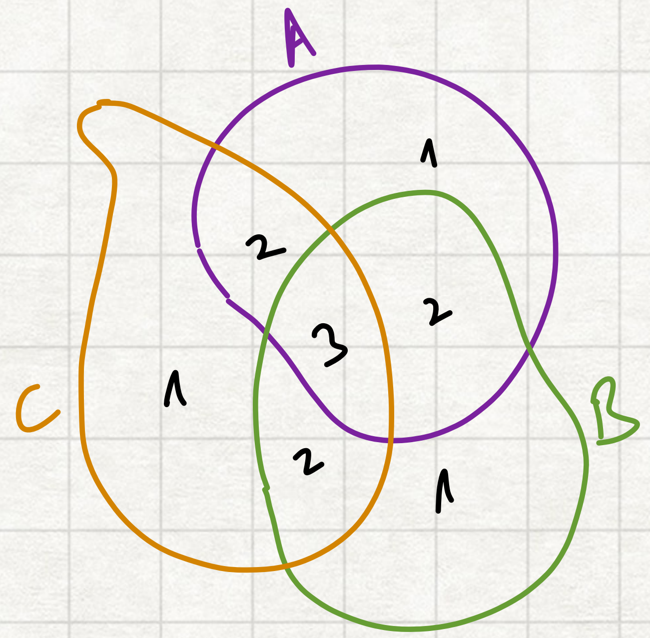
עיקרון ההכלה - הדחה לשלוש קבוצות



כמו במקרה של שתי קבוצות, נתחיל מלספור כל איבר

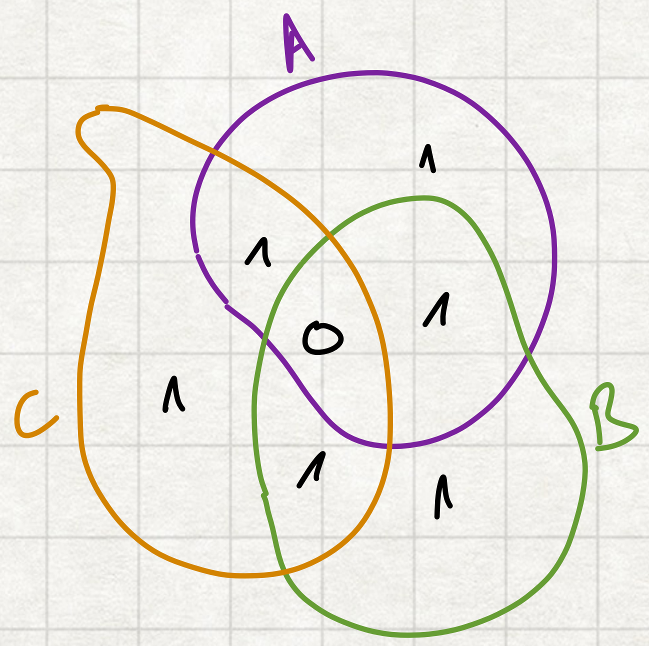
ב-A, ב-B וב-C מבלי התחשבות בחיתוכים.

$$|A|+|B|+|C| =$$



כעת צריך לתקן את החיתוכים. נתחיל מלחסר את החיתוכים בזוגות

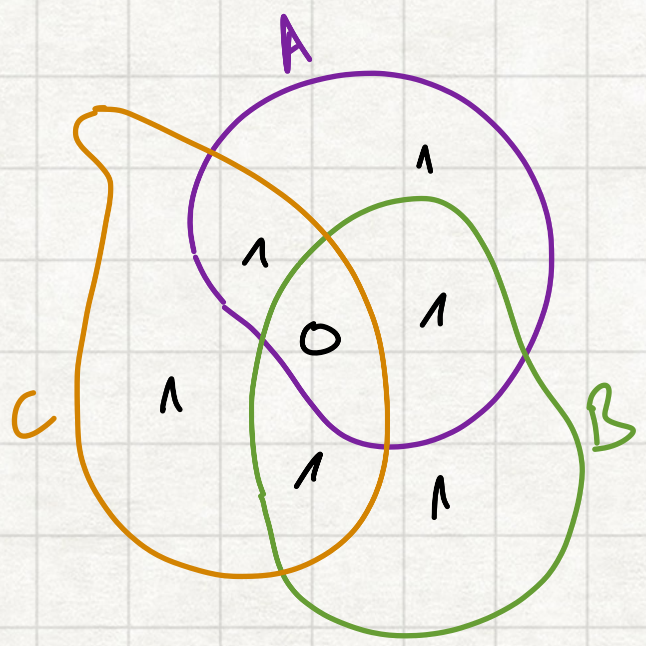
$$|A|+|B|+|C|-\left(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|\right) =$$



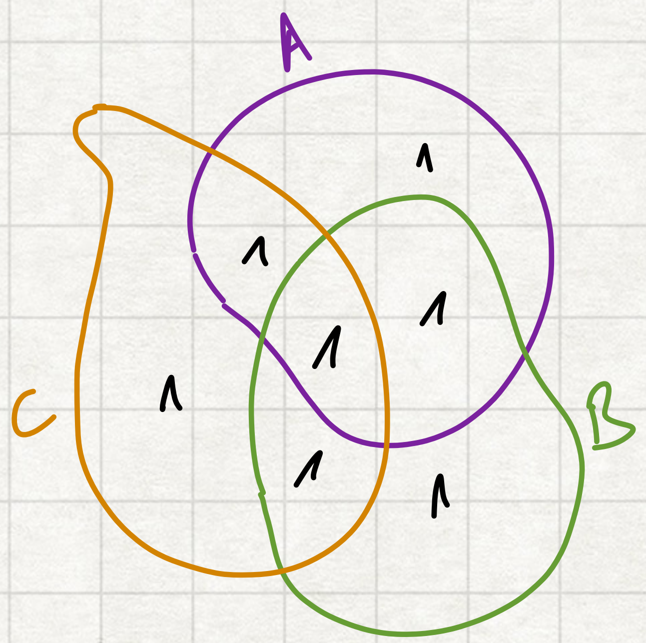
עיקרון ההכלה - הדחה לשלוש קבוצות

כעת צריך לתקן את החיתוכים. נתחיל מלחסר את החיתוכים בזוגות

$$|A|+|B|+|C|-\left(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|\right) =$$



הגזמנו. נתקן ע"י כך שנוסיף את $|A\cap B\cap C|$ ונקבל



$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-\left(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|\right)+|A\cap B\cap C|$$

שאלה 1

כמה מספרים שלמים בין 1 ל- 300 מתחלקים ב- 3 או ב- 5 ?

שאלה 1

כמה מספרים שלמים בין 1 ל- 300 מתחלקים ב-3 או ב-5 ?

פתרון חביב

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 ...

לכן בין 1 ל-15 יש 7 מספרים, והתבניות הללו מחזוריות. על כן

התשובה היא $\frac{300}{15}\cdot 7 = 140$

שאלה 1

כמה מספרים שלמים בין 1 ל- 300 מתחלקים ב- 3 או ב- 5 ?

פתרון בעזרת הכלה - הדחה

נסמן

$$A = \{ n \in [300] : \ 3 \mid n \}$$

$$B = \{ n \in [300] : \ 5 \mid n \}$$

במונחים אלו אנו מעוניינים ב- $|A \cup B|$. קל לראות כי

$$|A| = \frac{300}{3} = 100$$

$$|B| = \frac{300}{5} = 60$$

$$|A \cap B| = \frac{300}{15} = 20$$

ולכן

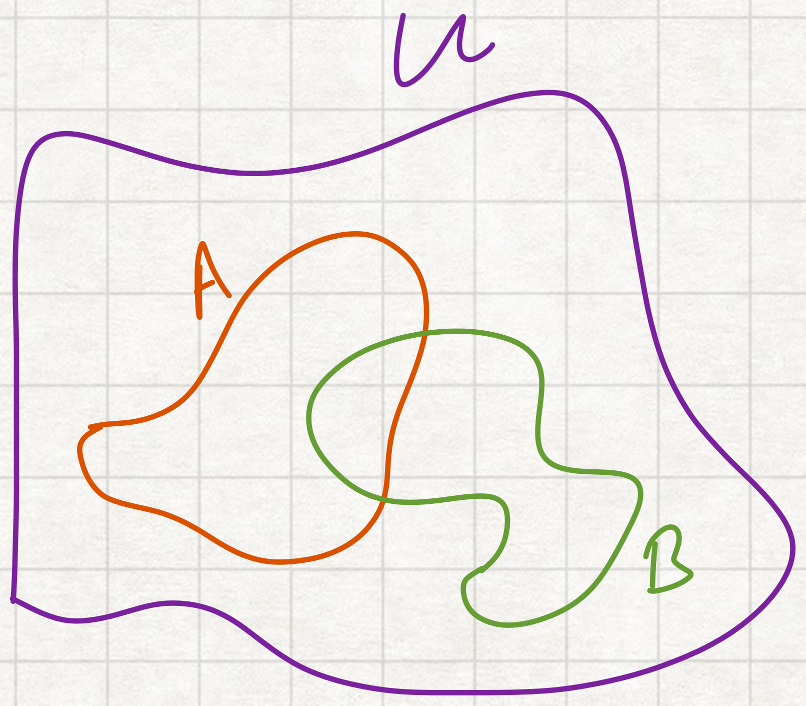
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 100 + 60 - 20 = 140$$

עיקרון ההכלה - הדחה המשלים עבור שתי קבוצות

לעיתים קרובות כל קבוצה $(A, B, \dots)$ תייצג תכונה שלא נרצה לקיים

ולכן נתעניין לא ב- $|A \cup B|$ אלא ב- $|\bar{A} \cap \bar{B}|$ כשהמשלים הוא ביחס

לקבוצה U כלשהי.



כל האיברים שאינם מקיימים
את תכונה A ואינם מקיימים
את תכונה B.

נפתח ל- $|\bar{A} \cap \bar{B}|$ נוסחה נוחה:

דה-מורגן

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |\overline{A \cup B}|$$

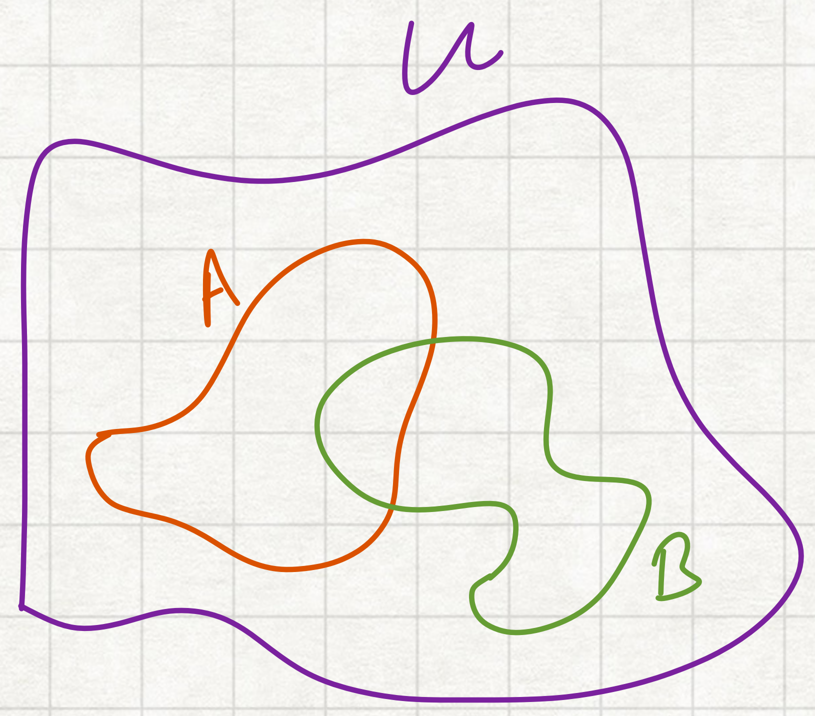
המשלים נלקח ביחס ל- U

$$= |U| - |A \cup B|$$

עיקרון ההכלה - הדחה לשתי קבוצות

$$= |U| - (|A| + |B| - |A \cap B|)$$

$$= |U| - (|A| + |B|) + |A \cap B|.$$



עיקרון ההכלה - הדחה המשלים עבור שתי קבוצות

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |U| - (|A| + |B|) + |A \cap B|.$$

ומה עבור שלוש קבוצות ?

$$\begin{aligned}|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |U| &- (|A| + |B| + |C|) \\ &+ (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) \\ &- |A \cap B \cap C|\end{aligned}$$

שאלה 2

נתונים 9 כדורים - 3 מכל צבע אדום, כחול וירוק כך שהכדורים מאותו צבע זהים.

א. בכמה דרכים ניתן לסדר את הכדורים בשורה?

ב. כמה אז רק שלא יהיו 3 כדורים סמוכים באותו הצבע?

$$
\begin{aligned}
|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |U| &- (|A|+|B|+|C|) \\
&+ (|A\cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) \\
&- |A \cap B \cap C|
\end{aligned}
$$

שאלה 2

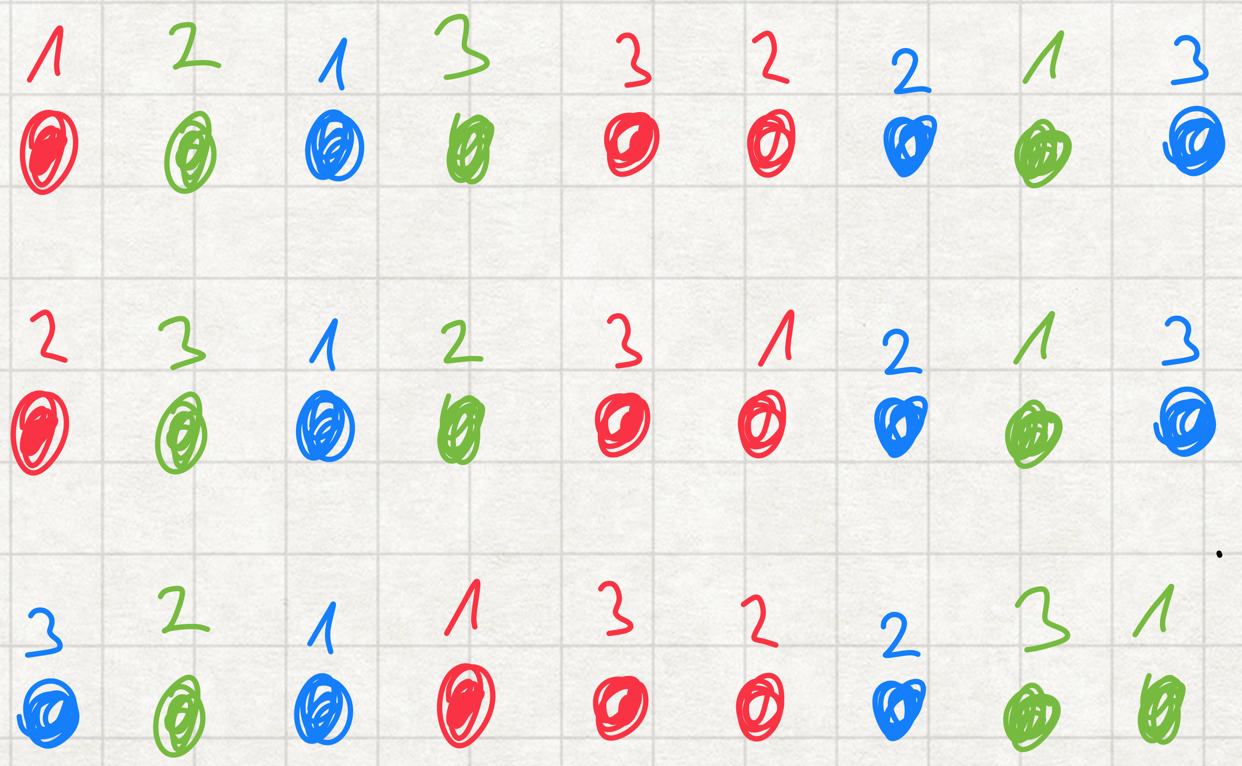
נתונים 9 כדורים - 3 מכל צבע אדום, כחול וירוק כך שהכדורים מאותו צבע זהים.

א. בכמה דרכים ניתן לסדר את הכדורים בשורה?

פתרון סעיף א

אם הכדורים היו שונים היו !9 אפשרויות לסדרם בשורה.

נערוך ניסוי מחשבתי בו נכתוב בעדינות על כל כדור מכל צבע את המספרים 1, 2 או 3, כל אחד על כדור אחר.



שאלה 2

נתונים 9 כדורים - 3 מכל צבע אדום, כחול וירוק כך שהכדורים מאותו צבע זהים.

א. בכמה דרכים ניתן לסדר את הכדורים בשורה?

פתרון סעיף א'

אם הכדורים היו שונים היו $9!$ אפשרויות לסדרם בשורה.

נערוך ניסוי מחשבתי בו נכתוב בדמיוננו על כל כדור מכל צבע את המספרים 1, 2 או 3, כל אחד על כדור אחר.

ישנם סידורים אשר יזהו כאשר נמחק את המספרים שהוספנו. ליתר דיוק ניתן לחלק את הסידורים עם המספרים לקבוצות כל אחת בגודל $(3!)^3$ כך שבכל הסידורים בה משרים את אותו הסידור הלא ממוספר, וקבוצות שונות משרות סידורים שונים. התשובה היא לכן

$$\frac{9!}{(3!)^3}.$$

שאלה 2

נתונים 9 כדורים - 3 מכל צבע אדום, כחול וירוק כך שהכדורים מאותו צבע זהים.

ג. כמו א׳ רק שלא יהיו 3 כדורים סמוכים באותו הצבע?

פתרון סעיף ג׳

נסמן ב-

R את קבוצת כל הסידורים בהם 3 הכדורים האדומים סמוכים.

B את קבוצת כל הסידורים בהם 3 הכדורים הכחולים סמוכים.

G — " — הירוקים סמוכים.

U את קבוצת כל הסידורים.

אנו מעוניינים ב- $|\bar{R}\cap\bar{B}\cap\bar{G}|$ (כאשר המשלים הוא ביחס ל-U).

$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}| = |U| - (|A|+|B|+|C|) + (|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|) - |A\cap B\cap C|$$

פתרון סעיף ג'

נסמן ב-

R את קבוצת כל הסידורים בהם 3 הכדורים האדומים סמוכים.

B את קבוצת כל הסידורים בהם 3 הכדורים הכחולים סמוכים.

G — " — הירוקים סמוכים.

U את קבוצת כל הסידורים.

אנו מעוניינים ב- $|\bar{R}\cap\bar{B}\cap\bar{G}|$ (כאשר המשלים הוא ביחס ל-U).

לצורך כך, ומסימטריה, מספיק לחשב את $|R\cap B\cap G|$, $|R\cap B|$, $|R|$.

$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}| = |U| - (|A|+|B|+|C|) + (|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|) - |A\cap B\cap C|$$

$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}| = |U| - (|A|+|B|+|C|) + (|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|) - |A\cap B\cap C|$$

פתרון סעיף ג'

נסמן ב-

R את קבוצת כל הסידורים בהם 3 הכדורים האדומים סמוכים.

B את קבוצת כל הסידורים בהם 3 הכדורים הכחולים סמוכים.

G — " — הירוקים סמוכים.

U את קבוצת כל הסידורים.

אנו מעוניינים ב- $|\bar{R}\cap\bar{B}\cap\bar{G}|$ (כאשר המשלים הוא ביחס ל-U).

לצורך כך, ומסימטריה, מספיק לחשב את $|R\cap B\cap G|$, $|R\cap B|$, $|R|$.

נתייחס לשלושת הכדורים האדומים כאל כדור אחד

$$|R| = \frac{7!}{(3!)^2}.$$

פתרון סעיף ב'

$$|\bar A\cap \bar B\cap \bar C| = |U| - (|A|+|B|+|C|) + (|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|) - |A\cap B\cap C|$$

נסמן ב-

R את קבוצת כל הסידורים בהם 3 הכדורים האדומים סמוכים.

B את קבוצת כל הסידורים בהם 3 הכדורים הכחולים סמוכים.

G — " — הירוקים סמוכים.

U את קבוצת כל הסידורים.

אנו מעוניינים ב- $|\bar R\cap \bar B\cap \bar G|$ (כאשר המשלים הוא ביחס ל-U).

לצורך כך, ומסימטריה, מספיק לחשב את $|R\cap B\cap G|, |R\cap B|, |R|$.

נתייחס לשלושת הכדורים האדומים כאל כדור אחד

$$|R| = \frac{7!}{(3!)^2}$$

$$|R\cap B| = \frac{5!}{3!}$$

$$|R\cap B\cap G| = 3!$$

פתרון סעיף ג'

נסמן ב-

R את קבוצת כל הסידורים בהם 3 הכדורים האדומים סמוכים.

B את קבוצת כל הסידורים בהם 3 הכדורים הכחולים סמוכים.

G — " — הירוקים סמוכים.

U את קבוצת כל הסידורים.

$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}| = |U| - (|A|+|B|+|C|) + (|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|) - |A\cap B\cap C|$$

$$|R| = \frac{7!}{(3!)^2}$$

$$|R\cap B| = \frac{5!}{3!}$$

$$|R\cap B\cap G| = 3!$$

$$|\bar{R}\cap\bar{B}\cap\bar{G}| = |U| - 3|R| + 3|R\cap B| - |R\cap B\cap G|$$

$$= \frac{9!}{(3!)^3} - \frac{3\cdot 7!}{(3!)^2} + \frac{3\cdot 5!}{3!} - 3!$$

נוסחת ההכלה-הדחה - המקרה הכללי

תהיינה $A_1,\dots,A_n$ קבוצות סופיות. אז

אנו מבינים שחיתוך של קבוצה ריקה של קבוצות הוא קבוצה ריקה

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{S\subseteq[n]} (-1)^{|S|+1}\left|\bigcap_{j\in S} A_j\right|$$

בפרט, במקרה הסימטרי בו $|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}|$ אינו תלוי בזהות של האינדקסים השונים $i_1,\dots,i_k$ מתקיים

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\binom{n}{k}\left|\bigcap_{j\in[k]} A_j\right|$$

נוסחת ההכלה-הדחה - המקרה הכללי

תהיינה $A_1,\dots,A_n$ קבוצות סופיות. אז

אנו מגדירים שחיתוך של קבוצה ריקה של קבוצות הוא קבוצה ריקה

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{S\subseteq[n]} (-1)^{|S|+1}\left|\bigcap_{j\in S}A_j\right|$$

הוכחה

ניקח $x\in\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. x תורם לאגף שמאל במשוואה 1. מה לגבי אגף ימין?

נסמן $T=\{i\in[n] \mid x\in A_i\}$ ו- $t=|T|$

נבחין כי המחובר המתאים ל-S תורם $(-1)^{|S|+1}$ לאגף ימין אמ"ם $S\subseteq T$ ו- $S\neq\emptyset$.

על כן יש $\binom{t}{k}$ קבוצות בגודל k שתורמים לספירה של x $(-1)^{k+1}$.

ולכן x נספר בצד שמאל

$$\sum_{k=1}^{t}(-1)^{k+1}\binom{t}{k} = 1$$

ראינו כי $0=\sum_{k=0}^{t}(-1)^{k}\binom{t}{k}$

נוסחת ההכלה-הדחה - המקרה הכללי

תהיינה $A_1, \dots, A_n$ תתי-קבוצות של קבוצה סופית U. אזי

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = \sum_{S\subseteq[n]} (-1)^{|S|} \left|\bigcap_{j\in S} A_j\right|$$

עם ההגדרה ש $\bigcap_{j\in\emptyset} A_j = U$.

ובפרט במקרה "הסימטרי"

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} \left|\bigcap_{j\in[k]} A_j\right|$$

שאלה 3 - בעיית הפקיד הרשלן

פקיד שיכור הגיע לעבודה. היום שלו דורש ממנו לשלוח n מכתבים ל-n יעדים.

מהו מספר האפשרויות לשלוח את n המכתבים ל-n יעדים מבלי שאף אחד יקבל את מכתבו?

בניסוח יותר פורמלי

תמורה של קבוצה A היא פונקציית זיווג $\pi : A \to A$.

מספר התמורות של קבוצה בגודל n הוא $n!$.

נאמר ש- $a \in A$ היא נקודת שבת של π אם $\pi(a)=a$.

בשאלה 3 אנו שואלים כמה תמורות על $[n]$ ללא נקודות שבת ישנן?

נסמן מספר זה ב- D_n.

בניסוח יותר פורמלי

תמורה של קבוצה A היא פונקציה זיווג $\pi : A \to A$.

מספר התמורות של קבוצה בגודל n הוא $n!$.

נאמר ש- $a \in A$ היא **נקודת שבת** של π אם $\pi(a) = a$.

בשאלה 3 אנו שואלים כמה תמורות של $[n]$ ללא נקודות שבת ישנן?

נסמן מספר זה ב- D_n.

דוגמה $n=2$

	1	2
	~~1~~	~~2~~
1	2	1

$n=3$

	1	2	3
	~~1~~	~~2~~	~~3~~
	~~1~~	~~3~~	~~2~~
	~~2~~	~~1~~	~~3~~
1	2	3	1
2	3	1	2
	~~3~~	~~2~~	~~1~~

$n=4$

	1	2	3	4
1	2	1	4	3
2	2	3	4	1
3	2	4	1	3
4	3	1	4	2
5	3	4	1	2
6	3	4	2	1
7	4	1	2	3
8	4	3	1	2
9	4	3	2	1

פתרון שאלה 3

נסמן ב-U את קבוצת כל התמורות של $[n]$.

עבור $i \in [n]$ נסמן ב-A_i את התמורות עם i כנקודת שבת.

אנו מעוניינים ב-

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \underbrace{\left|\bigcap_{j\in[k]} A_j\right|}_{\substack{\text{מספר התמורות על } [n] \\ \text{כך ש-} 1,\dots,k \text{ הן נק' שבת}}}$$

המקרה הסימטרי של עקרון ההכלה - הדחה המשלים

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!\,\cancel{(n-k)!}} \cancel{(n-k)!}$$

$$= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = D_n$$

פתרון שאלה 3

$$D_n = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

הערה

מי שיודע חדו"א וזוכר מזהה את הסכום לעיל שכן

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$$

ולכן $\frac{D_n}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{e}$. פירוש כאשר n גדול, $\frac{1}{e}$ מהתמורות הן ללא נק' שבת!

אפשר אפילו להוכיח כי

$$D_n = \begin{cases} \left\lceil \frac{n!}{e} \right\rceil & n \text{ זוגי} \\ \left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rfloor & n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

שאלה 4

תהא A קבוצה בגודל n.

א. כמה פונקציות $f: A \to A$ ישנן?

ב. כמה פונקציות $f: A \to A$ ללא נקודות שבת ישנן?

ג. כמה פונקציות חח"ע $f: A \to A$ ללא נקודות שבת ישנן?

ד. כמה פונקציות זיווג $f: A \to A$ ללא נקודות שבת ישנן?

שאלה 4

תהא A קבוצה בגודל n.

א. כמה פונקציות $f: A \to A$ ישנן?

ב. כמה פונקציות $f: A \to A$ ללא נקודות שבת ישנן?

ג. כמה פונקציות חח"ע $f: A \to A$ ללא נקודות שבת ישנן?

ד. כמה פונקציות זיווג $f: A \to A$ ללא נקודות שבת ישנן?

פתרון

א. n^n, מעיקרון הכפל.

שאלה 4

תהא A קבוצה בגודל n.

א. כמה פונקציות $f: A \to A$ ישנן?

ב. כמה פונקציות $f: A \to A$ ללא נקודות שבת ישנן?

ג. כמה פונקציות חח"ע $f: A \to A$ ללא נקודות שבת ישנן?

ד. כמה פונקציות זיווג $f: A \to A$ ללא נקודות שבת ישנן?

פתרון

א. n^n, מעיקרון הכפל.

ב. $(n-1)^n$ שוב מעיקרון הכפל

שאלה 4

תהא A קבוצה בגודל n.

א. כמה פונקציות $f: A \to A$ ישנן?

ב. כמה פונקציות $f: A \to A$ ללא נקודות שבת ישנן?

ג. כמה פונקציות חח"ע $f: A \to A$ ללא נקודות שבת ישנן?

ד. כמה פונקציות זיווג $f: A \to A$ ללא נקודות שבת ישנן?

פתרון

א. n^n, מעיקרון הכפל.

ב. $(n-1)^n$ שוב מעיקרון הכפל

ג.

ד. D_n כפי שהוכחנו.

שאלה 4

תהא A קבוצה בגודל n.

א. כמה פונקציות $f: A \to A$ ישנן?

ב. כמה פונקציות $f: A \to A$ ללא נקודות שבת ישנן?

ג. כמה פונקציות חח"ע $f: A \to A$ ללא נקודות שבת ישנן?

ד. כמה פונקציות זיווג $f: A \to A$ ללא נקודות שבת ישנן?

פתרון

א. n^n, מעיקרון הכפל.

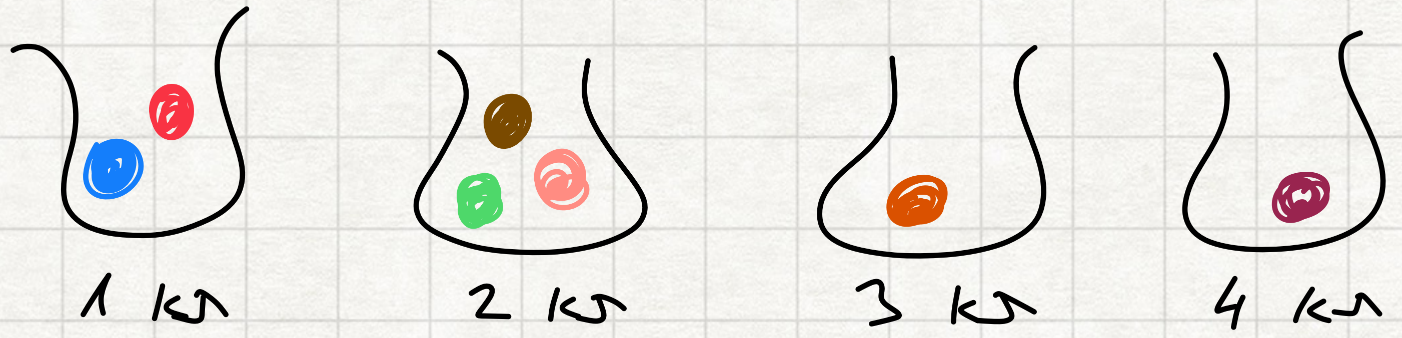
ב. $(n-1)^n$ שוב מעיקרון הכפל

ג. גם כן D_n שכן A סופית ולכן f מהיותה חח"ע מ-A לעצמה היא גם על ולכן זיווג.

ד. D_n כפי שהוכחנו.

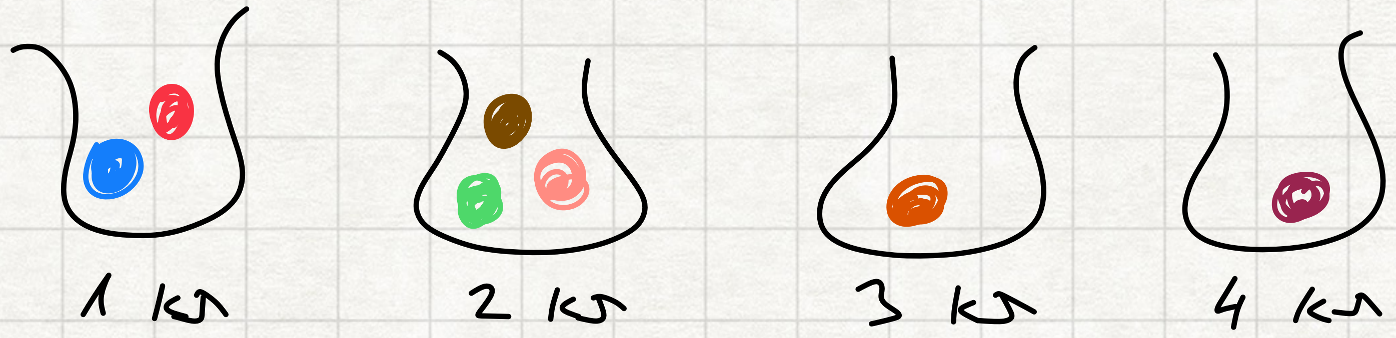
שאלה 5

בכמה אופנים אפשר לחלק n כדורים שונים ל-4 תאים שונים כך שאף תא לא יישאר ריק, ואין חשיבות לסדר הכדורים בתוך התא?



שאלה 5

בכמה אופנים אפשר לחלק n כדורים שונים ל-4 תאים שונים כך שאף תא לא יישאר ריק, ואין חשיבות לסדר הכדורים בתוך התאים?



פתרון שגוי

קלי קלות! נבחר 4 כדורים מתוך ה-n ו"נפזר" בעזרתם את התאים כך שיובטח שלא יישאר תא ריק.

לצורך כך יש

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = \binom{n}{4}\cdot 4!$$

בחירת כדור מרפד לתא 1

בחירת כדור מרפד, מאלו שנותרו עבור תא 2

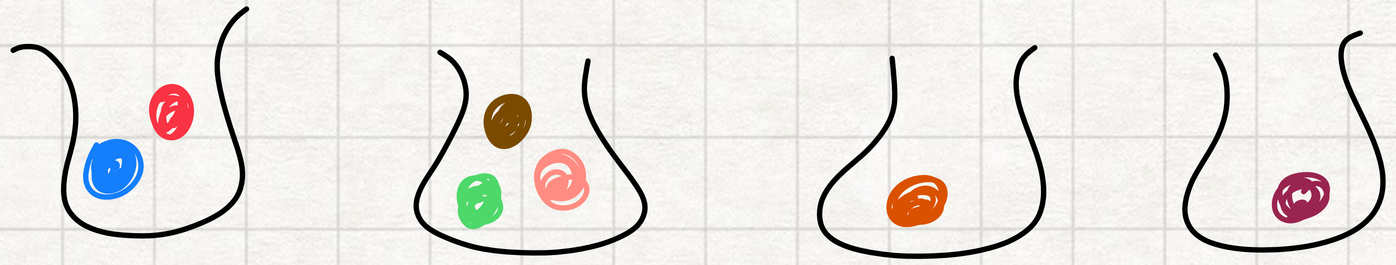
כי מצד אחר, נבחר 4 כדורים מתוך ה-n ואז נפזר באחת מבין 4! אפשרויות לתאים השונים

אפשרויות. אחרי שעשינו זאת נותרנו עם n-4 כדורים שונים ולפזרם (מבלי לדאוג לריקנות התאים) יש 4^{n-4} אפשרויות.

התשובה הסופית היא לכן $\binom{n}{4}\cdot 4!\cdot 4^{n-4}$

שאלה 5

כמה אופנים אפשר לחלק n כדורים שונים ל-4 תאים שונים כך שאף תא לא יישאר ריק, ואין חשיבות לסדר הכדורים בתוך התאים?



תא 1   תא 2   תא 3   תא 4

הבעיה בפתרון השני

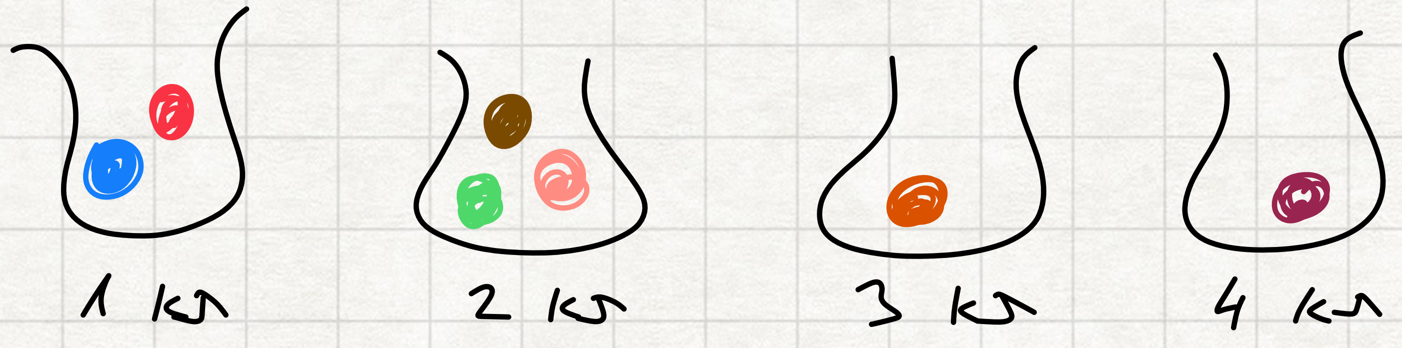
ביצענו ספירה כפולה - מכיוון שאין חשיבות לסדר בתוך תא נתון, ●●, למשל נספר פעמיים:

●	מרפ?	ו-	● מרפ?
●	מבחר 4	:	● מבחר 4

בעצם הכנסנו סוג של סדר מלאכותי בתוך כל תא.

שאלה 5

בכמה אופנים אפשר לחלק n כדורים שונים ל-4 תאים שונים כך שאף תא לא "ישאר ריק, ואין חשיבות לסדר הכדורים בתוך התאים?



פתרון (שנראה לי נכון ☺)

נעזר בהכלה-הדחה. נסמן ב-:

A_1 = כל הסידורים של n הכדורים ל-4 התאים כך שתא 1 נשאר ריק.

$\vdots$

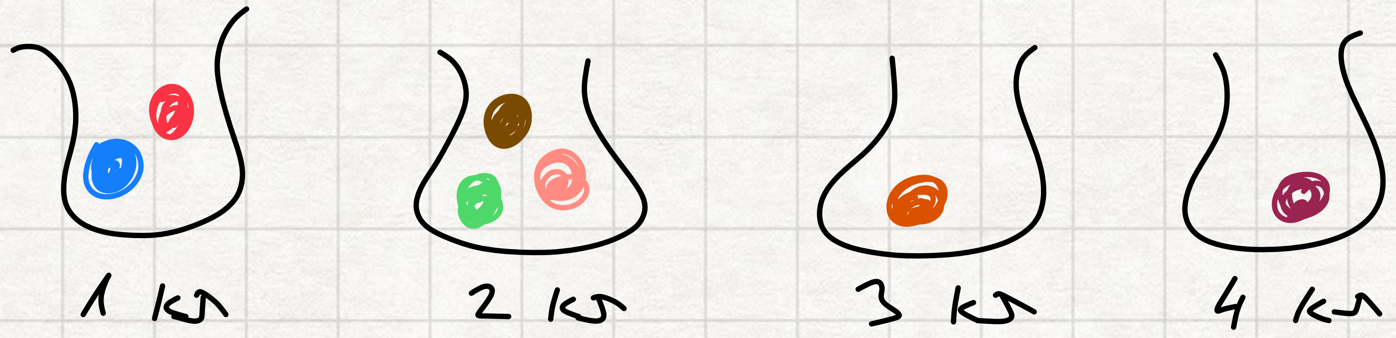
A_4 = כל הסידורים של n הכדורים ל-4 התאים כך שתא 4 נשאר ריק.

U = כל הסידורים של n הכדורים ל-4 התאים ללא הגבלה.

אנו מעוניינים ב $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4|$.

שאלה 5

בכמה אופנים אפשר לחלק n כדורים שונים ל-4 תאים שונים כך שאף תא לא "ישאר" ריק, ואין חשיבות לסדר הכדורים בתוך התא?



פתרון (שנראה לי נכון :))

נעזר בהכלה-הדחה. נסמן ב-:

A_1 = כל הסידורים של n הכדורים ל-4 התאים כך שתא 1 נשאר ריק.

$\vdots$

A_4 = כל הסידורים של n הכדורים ל-4 התאים כך שתא 4 נשאר ריק.

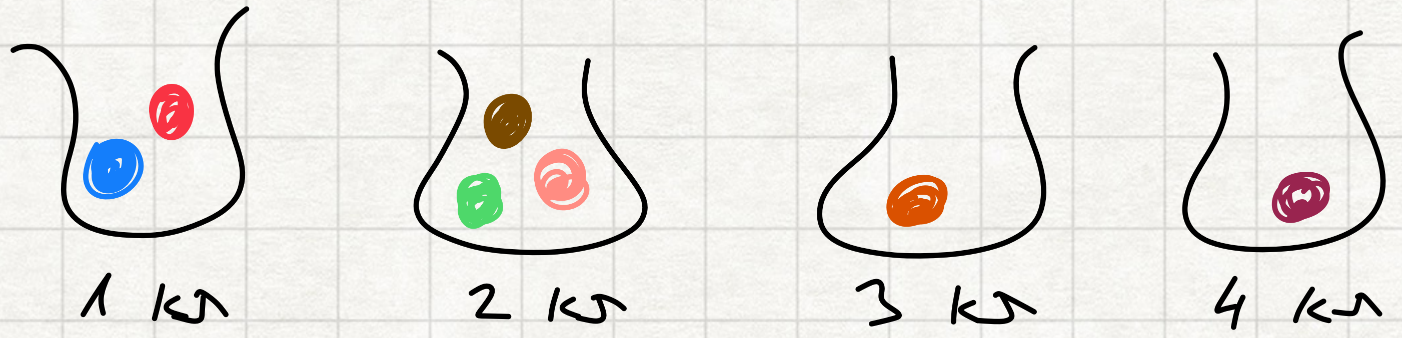
U = כל הסידורים של n הכדורים ל-4 התאים ללא הגבלה.

אנו מעוניינים ב- $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4|$.

מסימטריה, ומעיקרון ההכלה הדחה, מספיק לחשב את $|U|, |A_1|, |A_1 \cap A_2|, |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ ו- $|A_1 \cap \cdots \cap A_4|$.

שאלה 5

בכמה אופנים אפשר לחלק n כדורים שונים ל-4 תאים שונים כך שאף תא לא יישאר ריק, ואין חשיבות לסדר הכדורים בתוך התאים?



פתרון (שנראה לי נכון ☺)

נעזר בהכלה-הדחה. נסמן כי:

A_i = כל הסידורים של n הכדורים ל-4 התאים כך שתא i נשאר ריק.

U = כל הסידורים של n הכדורים ל-4 התאים ללא הגבלה.

$$|U| = 4^n$$

$$|A_1| = 3^n$$

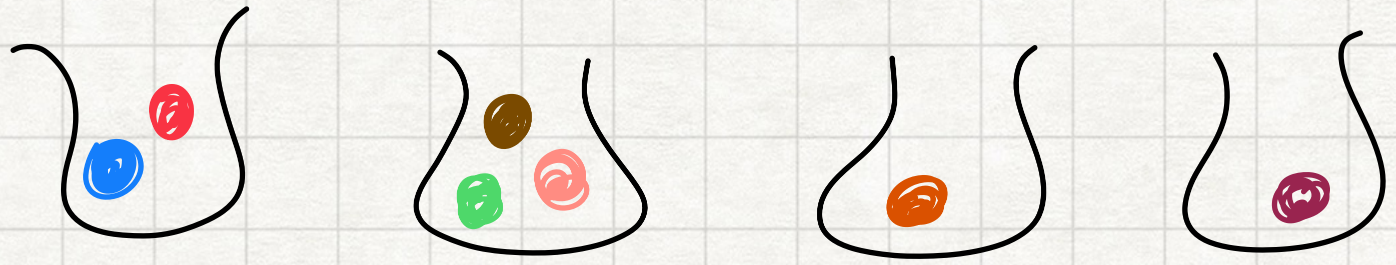
$$|A_1 \cap A_2| = 2^n$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$$

$$|A_1 \cap \dots \cap A_4| = 0$$

שאלה 5

בכמה אופנים אפשר לחלק n כדורים שונים ל-4 תאים שונים כך שאף תא לא "ישאר ריק, ואין חשיבות לסדר הכדורים בתוך התאים?



פתרון (שנראה לי נכון ☺)

נעזר בהכלה-הדחה. נסמן:

A_i = כל הסידורים של n הכדורים ל-4 התאים כך שתא i נשאר ריק.

U = כל הסידורים של n הכדורים ל-4 התאים ללא הגבלה.

$$|U| = 4^n$$

$$|A_1| = 3^n$$

$$|A_1 \cap A_2| = 2^n$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$$

$$|A_1 \cap \cdots \cap A_4| = 0$$

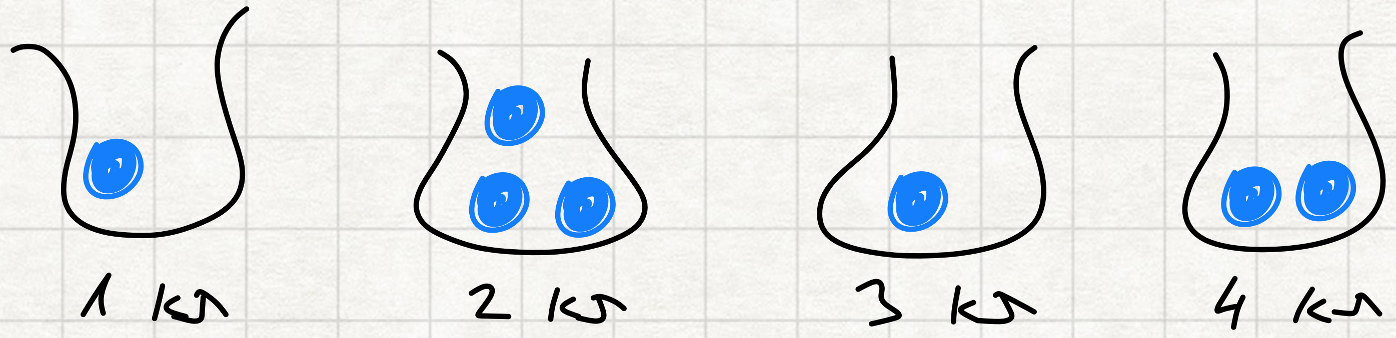
$$\Longrightarrow \quad |\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_4| = |U| - 4|A_1| + 6|A_2| - 4|A_3| + |A_4|$$

$$= 4^n - 4\cdot 3^n + 6\cdot 2^n - 4$$

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left|\bigcap_{j\in[k]} A_j\right|$$

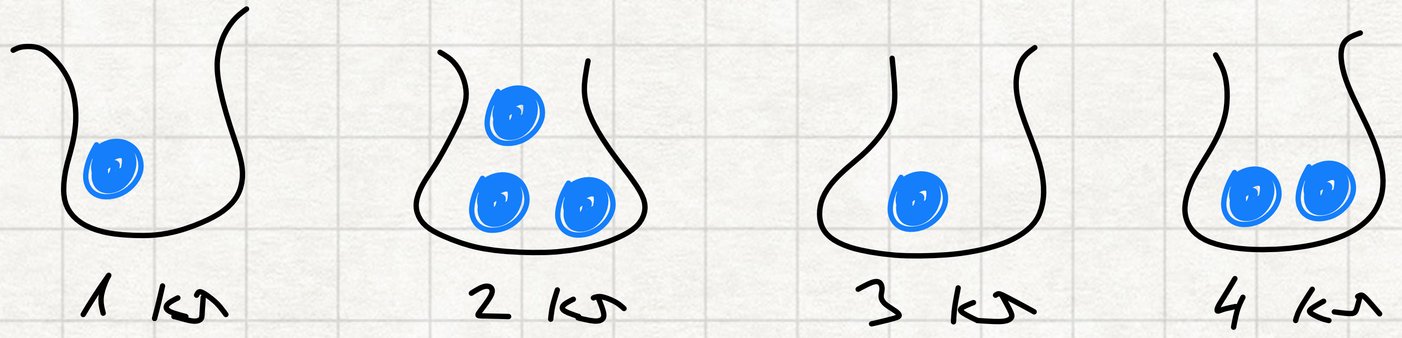
שאלה 5

בכמה אופנים אפשר לחלק n כדורים ~~שונים~~ זהים ל-4 תאים שונים כך שאף תא לא יישאר ריק, ואין חשיבות לסדר הכדורים בתוך התאים?



שאלה 5

בכמה אופנים אפשר לחלק n כדורים ~~שונים~~ זהים ל-4 תאים שונים כך שאף תא לא יישאר ריק, ואין חשיבות לסדר הכדורים בתוך התאים?

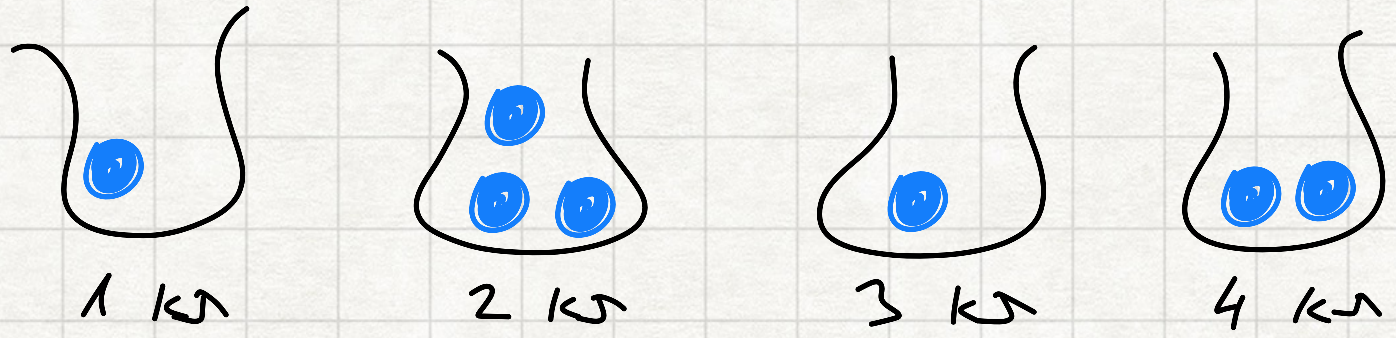


שוב עיקרון ההכלה - הדחה?

בעיקרון שוב ניתן לפתור בדרך דומה. חישבו איך! אבל זו בהחלט לא הפתרון המועדף ביותר שכן הוא יינתן בצורת סכימה.

שאלה 5

בכמה אופנים אפשר לחלק n כדורים ~~שונים~~ זהים ל-4 תאים שונים כך שאף תא לא יישאר ריק, ואין חשיבות לסדר הכדורים בתוך התאים?



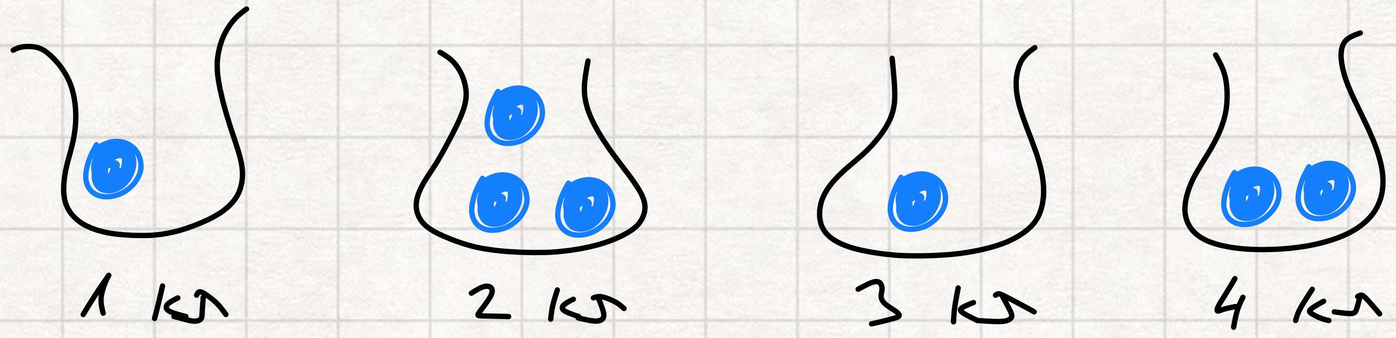
פתרון

נבחין כי כל פתרון מתקבל ע"י כך שנבחר כמה כדורים יש בכל תא ובהכרח לכך שבכל תא ישנו לפחות כדור אחד. כלומר, אנו מעוניינים במספר הפתרונות למערכת

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n \\ x_1, \ldots, x_4 \geq 1 \end{cases}$$

שאלה 5

בכמה אופנים אפשר לחלק n כדורים ~~שונים~~ זהים ל-4 תאים שונים כך שאף תא לא יישאר ריק, ואין חשיבות לסדר הכדורים בתוך התאים?



פתרון

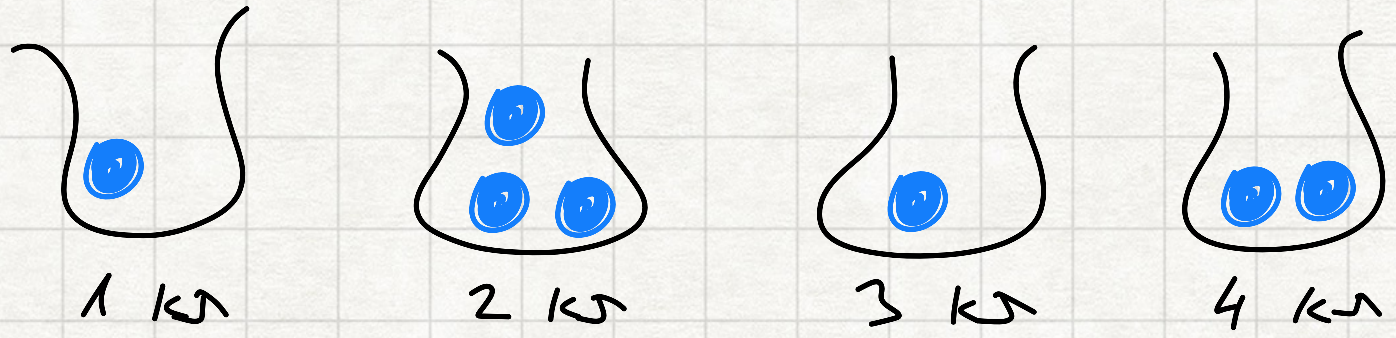
נבחין כי כל פתרון מתקבל ע"י כך שנבחר כמה כדורים יש בכל תא ובכפוף לכך שבכל תא ישנו לפחות כדור אחד. כלומר, אנו מעוניינים במספר הפתרונות למערכת

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n \\ x_1, \dots, x_4 \geq 1 \end{cases}$$

אם היה התנאי $\forall i \; x_i \geq 0$ במקום, הפתרון כפי שהוכח הוא $\binom{n-3}{3}$.

שאלה 5

בכמה אופנים אפשר לחלק n כדורים ~~שונים~~ זהים ל-4 תאים שונים כך שאף תא לא "ישאר ריק, ואין חשיבות לסדר הכדורים בתוך התאים?



פתרון

אני מעוניינים במספר הפתרונות למערכת

$$(*)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n \\ x_1, \dots, x_4 \geq 1 \end{cases}$$

אם היה התנאי $\forall i\ x_i \geq 0$ במקום, הפתרון כפי שראינו הוא $\binom{n-3}{3}$.

נבחין כי פתרונות למערכת $(*)$ נמצאים בזיווג עם פתרונות למערכת

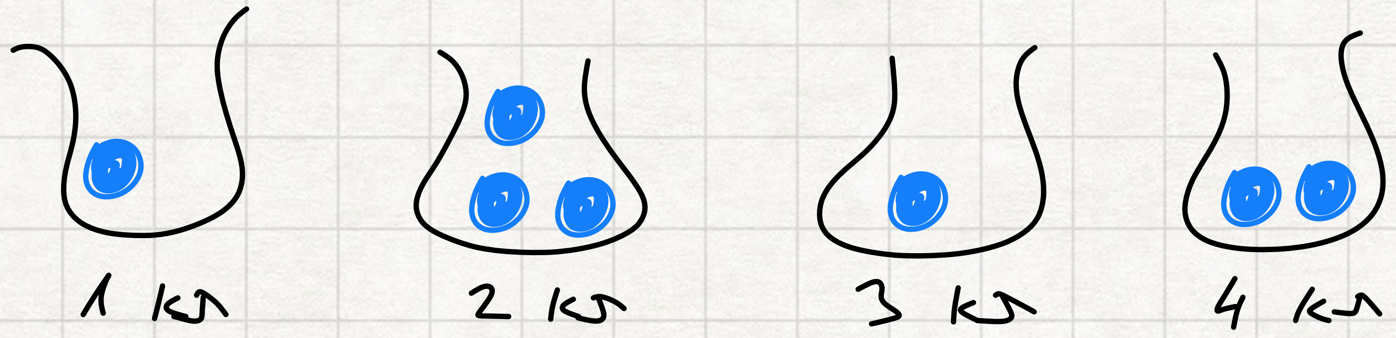
$$(**)\quad \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = n-4 \\ y_1, \dots, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

אכן - הזיווג נתון ע"י

$$(x_1, \dots, x_4) \longmapsto (\underbrace{x_1 - 1}_{y_1}, \dots, \underbrace{x_4 - 1}_{y_4})$$

שאלה 5

בכמה אופנים אפשר לחלק n כדורים ~~שונים~~ זהים ל-4 תאים שונים כך שאף תא לא יישאר ריק, ואין חשיבות לסדר הכדורים בתוך התאים?



פתרון

אנו מעוניינים במספר הפתרונות למערכת

$$(*)\quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = n \\ x_1,\dots,x_4 \geq 1 \end{cases}$$

אם היה התנאי $\forall i\ x_i \geq 0$ במקום, הפתרון כפי שהוכח הוא $\binom{n+3}{3}$.

נבחין כי פתרונות למערכת $(*)$ נמצאים בזיווג עם פתרונות למערכת

$$(**)\quad \begin{cases} y_1+y_2+y_3+y_4 = n-4 \\ y_1,\dots,y_4 \geq 0 \end{cases}$$

אכן - הזיווג נתון ע"י $(x_1,\dots,x_4) \longmapsto (\underbrace{x_1-1}_{y_1},\dots,\underbrace{x_4-1}_{y_4})$

$\Leftarrow$ הפתרון הוא $\binom{(n-4)+3}{3} = \binom{n-1}{3}$

שאלה 6

כמה מטריצות $2\times n$ ישנן עם הערכים $n,\dots,1$ כך שבכל שורה ובכל עמודה יש ערכים שונים?

1	5	3	2	4
3	4	1	5	2

שאלה 6

כמה מטריצות $2\times n$ ישנן עם הערכים $1,\dots,n$ כך שבכל שורה ובכל עמודה יש ערכים שונים?

$$\boxed{\begin{matrix} 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{matrix}}$$

פתרון

ישנן $n!$ דרכים למלא את השורה הראשונה.

על כל אפשרות יש D_n דרכים למלא את השורה השנייה.

$\Leftarrow$ התשובה היא $n!\cdot D_n$.